

About the elastic energy related to an inclusion or an inhomogeneity in large or infinite spaces and mixed boundary conditions

À propos de l'énergie élastique d'une inclusion ou inhomogénéité dans un espace grand ou infini sous des conditions mixtes aux frontières

Christophe Fond

Laboratoire ICube, Institut Universitaire de Technologie Robert Schuman - département génie civil, 72 route du Rhin B.P. 315, F67411 Illkirch cedex

Abstract

The equivalent inclusion method allows to solve analytically and exactly problems for one inhomogeneity in an elastic domain in generally infinite spaces. It also allows to solve semi-analytically and approximately problems for several inhomogeneities in elastic domains. Knowing the additional elastic energy due to the presence of one or more inclusions / inhomogeneities is essential to estimate the elastic properties of the homogenized medium. The usual demonstrations proposed to calculate this energy supplement often make the assumption of stress free boundary condition. These demonstrations would be valid for solutions obtained under these conditions in finite domains. Unfortunately, this is no longer the case when we use analytical solutions established in infinite domains. For the latter solutions, which are mostly used, the stresses do tend towards zero when one moves away from the inclusion but the rate of decrease, compared to the rate of growth of the boundary surface, is not sufficient for one to consider them as zero. Indeed, a correction - even a very small one - is essential to quantify precisely the strain energy when implementing numerically these calculation methods. I provide here a demonstration that does not make this usual stress-free boundary assumption by considering mixed boundary conditions when isolating a large finite domain in an infinite domain. This allows credit for suitable estimates in finite and infinite domains. A numerical illustration is added to provide

orders of magnitude and finish convincing the readers.

Résumé

La méthode de l'inclusion équivalente permet de résoudre analytiquement et exactement des problèmes pour une inhomogénéité dans un domaine élastique en général dans un espace infini. Elle permet aussi de résoudre semi-analytiquement et approximativement des problèmes pour plusieurs inhomogénéités dans des domaines élastiques. Connaître le supplément d'énergie élastique lié à la présence d'une ou plusieurs inclusions / inhomogénéités est essentiel pour, entre autres, estimer les propriétés élastiques du milieu homogénéisé. Les démonstrations usuelles proposées pour calculer ce supplément d'énergie font souvent l'hypothèse de bords éloignés de l'inclusion libre de contrainte. Ces démonstrations seraient valables pour des solutions obtenues sous ces conditions en domaines finis. Ce n'est malheureusement plus le cas lorsqu'on utilise des solutions analytiques établies en domaine infini. Pour ces dernières solutions majoritairement utilisées, ces contraintes tendent effectivement vers zéro lorsqu'on s'éloigne de l'inclusion mais le taux de décroissance, comparé au taux de croissance de surface de frontière, n'est pas suffisant pour que l'on puisse les considérer nulles. En effet, une correction - même infime - est indispensable pour quantifier précisément l'énergie de déformation lorsqu'on met en œuvre numériquement ces méthodes de calculs. Je fournis ici une démonstration qui ne fait pas cette hypothèse usuelle de bord libre de contrainte en prenant en considération les conditions mixtes de bord lorsqu'on isole un domaine fini grand dans un domaine infini. Ceci permet de créditer des estimations convenables en domaines finis et infinis. Une illustration numériquement est ajoutée pour fournir des ordres de grandeurs et finir de convaincre les lecteurs.

Keywords: micromechanics, inhomogeneities, heterogeneities, inclusions, elasticity, equivalent inclusion method, homogenization

Mots clefs : micromécanique, inhomogénéités, hétérogénéités, inclusions, élasticité, méthode de l'inclusion équivalente, homogénéisation

1. Introduction

La volonté est de résoudre des problèmes d'élasticité linéaire pour des milieux hétérogènes bien que des déformations plastiques puissent aussi être envisagées (Doghri et al., 2011). L'estimation des propriétés élastiques moyennes

(Benveniste, 1987), (Brisard et al., 2014) ne constitue pas le seul objectif puisque nous nous intéressons aussi aux phénomènes d’endommagement locaux (Berthaud et al., 1994), (Fond et al., 1995), (Fond and Berthaud, 1995), (Fond et al., 1996), (Fond, 2001), (Shodja et al., 2003), (Benedikt et al., 2006), (Xu et al., 2023). Nous cherchons donc à connaître les tenseurs de localisation en présence d’interaction mécanique. Nous nous placerons dans le respect des hypothèses des petites perturbations (H. P. P.), i. e. élasticité linéaire en petites déformations et petits déplacements¹. L’élasticité considérée est linéaire de sorte qu’il est loisible de superposer des champs cinématiquement et statiquement admissibles. En pratique pour nos applications numériques, l’élasticité est isotrope et les domaines qui contiennent les inclusions ou inhomogénéités sont sphériques. Le calcul de l’énergie élastique de déformation n’est pas immédiat pour les domaines infinis considérés. En particulier, la remarque souvent faite dans la littérature concernant les contraintes qui s’annulent aux frontières très éloignées² conduit à l’hypothèse d’un travail nul de ces contraintes dans les déplacements aux frontières. Un regard approfondi sur ce point montre que ce n’est généralement pas pour les solutions analytiques connues puisque les conditions aux frontières sont mixtes (Brisard et al., 2013). Il convient donc de reconsidérer cet argument de la démonstration fréquemment fournie dans la littérature - inexacte lorsqu’on utilise les solutions analytiques calculées pour un domaine de dimensions infinies - pour analyser les conditions dans lesquelles ce petit supplément d’énergie vaut effectivement $\Delta W_p = \pm \frac{1}{2} V_p \underline{\underline{\sigma}}^\infty \underline{\underline{\beta}}^p$. Pour ces dernières solutions majoritairement utilisées, ces contraintes tendent effectivement vers zéro lorsqu’on s’éloigne de l’inclusion. Mais leur taux de décroissance, comparé au taux de croissance de surface de frontière, n’est pas suffisant pour que l’on puisse les considérer nulles. En effet, l’intégrale du calcul du travail des efforts extérieurs fait apparaître le produit d’un terme qui tend vers zéro par un terme qui tend vers l’infini avec des taux de croissance et décroissance inverses de sorte que l’on tend asymptotiquement vers une valeur constante et non nulle. La mise en œuvre numérique de cette méthode de calcul montre clairement qu’une correction numérique basée sur les valeurs aux frontières éloignées est indispensable pour quantifier convenablement l’énergie de dé-

¹On pourra assimiler la géométrie initiale à la géométrie déformée.

²I.e. à l’infini.

formation. Même si cette correction numérique tend vers zéro³ pour des domaines de plus en plus grands, elle demeure numériquement indispensable et constitue la base de la démonstration rigoureuse fournie dans cet article.

2. Préambule

Nous nous placerons sous les hypothèses de petites perturbations (H. P. P.), c'est-à-dire en élasticité linéaire en petites déformations et petits déplacements⁴. L'élasticité considérée est linéaire de sorte qu'il est possible de superposer des champs cinématiques et statiques admissibles. De plus, nous nous trouvons dans un système où les déformations, les contraintes et les déplacements sont proportionnels à la sollicitation de sorte que :

- même si l'on suppose, par souci de simplicité, une déformation proche de l'unité, on ne sort pas du cadre des H. P. P. et il suffit d'appliquer aux résultats un coefficient petit devant l'unité pour obtenir un résultat réaliste correspondant aux hypothèses de petites déformations et de petits déplacements,

- comme il s'agit de systèmes linéaires, un seul calcul suffit, il suffit alors d'appliquer un coefficient de proportionnalité pour ajuster le résultat comme on le souhaite.

3. Illustration dans un cas simple

3.1. Une sphère pleine sous pression

Considérons une sphère de rayon extérieur R_{ext} constituée d'un matériau dont, pour simplifier, le module d'Young E est égal à $1 Pa$ et le coefficient de Poisson ν égal à 0.3 de sorte que son module apparent K est égal à $\frac{1}{1,2} Pa$. Cette sphère est soumise à une tension équitriaxiale uniforme égale à $1 Pa$, c'est-à-dire que la pression externe P_{ext} est égale à $-1 Pa$. L'énergie de déformation W_0 du volume total V_0 de cette sphère est alors égale à $\frac{V_0 P_{ext}^2}{2K} = \frac{2\pi R_{ext}^3 P_{ext}^2}{3K}$.

³De même que ΔW_p qui est du même ordre de grandeur.

⁴De sorte que l'on puisse assimiler l'état initial et l'état déformé.

3.2. Une sphère creuse sous pression

Dans de très rares cas, la solution analytique est connue pour un domaine de taille finie contenant une inhomogénéité telle qu'une sphère creuse sous pression. Dans ce dernier cas, le problème est en quelque sorte uniaxial. La solution analytique est donnée dans Appendix A. En revanche, la solution analytique pour une cavité sphérique dans un domaine infini sous pression est disponible dans (Eshelby, 1957), (Eshelby, 1959). Dans ce cas, les déformations libres β_{ii} sont non nulles et $\beta_{ij}, i \neq j$, sont égales à zéro.

3.3. Résultats numériques

Considérons maintenant, pour les valeurs numériques données en 3.1, une sphère de taille relativement grande par rapport à la taille d'une cavité sphérique interne et centrée, par exemple typiquement $R_{ext} = 100R_{int}$. Par souci de simplicité, choisissons $R_{int} = 1m$ de sorte que $R_{ext} = 100m$. L'énergie de déformation W calculée à partir de l'équation A.3 est $W = 2.513280720 \times 10^6 J$ ce qui conduit à $W - W_0 = 6.597J$ puisque $W_0 = 2.513274123 \times 10^6 J$ dans ce cas. Notons que cela correspond à la condition aux limites exacte prescrite en contrainte. Le déplacement à $R_{ext} = 100m$ est égal à $U_r(R_{ext}) \approx 40.000105m$. En imposant $P_{ext} = -1 \times \frac{40.0}{40.000105}$ afin d'obtenir des conditions aux limites exactes prescrites en déplacements, c'est-à-dire $U_r(R_{ext}) = 40.0m$ conduit à $W - W_0 = -6.597J$.

Pour un domaine de taille infinie, avec les mêmes caractéristiques matériau, contenant une cavité sphérique, les déformations libres β_{ii} sont égales à 1.05 pour $P_{ext} = -1Pa$ (Eshelby, 1957). Cela conduit à $\Delta W_p = 6.597J$ pour une cavité sphérique de rayon $R_{int} = 1m$. Cela montre que si l'on considère que $R_{ext} = 100R_{int}$ simule presque un domaine infini et que $\Delta W_p = \pm \frac{1}{2} V_p \underline{\underline{\sigma}}^\infty \underline{\underline{\beta}}^p$ est valide pour des conditions aux limites exactes. Cela montre également, comme on s'y attendait, que $\frac{\Delta W_p}{W_0} \ll 1$.

Pour les problèmes d'homogénéisation, les déformations ou les contraintes sont définies à l'infini. Dans notre cas, cela conduirait à $\epsilon_{ii}^\infty = 0.4$ et $\sigma_{ii}^\infty = 1 Pa^5$. On suppose généralement que pour des domaines infinis contenant un nombre fini d'inhomogénéités, la valeur moyenne de la déformation $\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle$ est égale à $\underline{\underline{\epsilon}}^\infty$ et que la valeur moyenne de la contrainte $\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle$ est égale à $\underline{\underline{\sigma}}^\infty$. Dans le cas de la solution d'Eshelby pour laquelle $\beta_{ii} = 1.05$, à $R_{ext} = 100m$ on calcule $U_r(100m) = 40.000065m$ et $\sigma_{rr}(100m) = 0.9999990 Pa$. Ainsi, en

⁵Si $i \neq j$, $\epsilon_{ij}^\infty = 0$ et $\sigma_{ij}^\infty = 0$.

calculant l'énergie de déformation à partir du travail des efforts extérieurs⁶, on obtient $W = 2.513275694 \times 10^6 J$ d'où $W - W_0 \approx 1.571J$ à $R = 100m$. Même s'ils tendent à le faire, quel que soit le rapport $\frac{R}{R_{int}}$, ni la valeur moyenne de la déformation ni la valeur moyenne de la contrainte ne correspondent à la valeur moyenne exacte imposée de la déformation ou de la contrainte. Même pour des rapports plus importants de $\frac{R}{R_{int}}$, on observe toujours que $\langle \epsilon_{ii} \rangle > 0.4$ et $\langle \sigma_{ii} \rangle < 1$ et que le travail des efforts "extérieurs" atteint rapidement une valeur asymptotique égale à $W - W_0 \approx 1.571J$, comme le montre le tableau 1. Cette valeur ne correspond pas à ΔW_p même pour des domaines infiniment grands. En fait, si les efforts "extérieurs" tendent vers zéro pour des domaines de plus en plus grands, leur travail dans le déplacement converge vers une valeur finie non nulle. L'utilisation des principes variationnels au lieu de la Méthode classique de l'Inclusion Équivalente (M. I. E.), (Eshelby, 1957), (Eshelby, 1959), pour résoudre numériquement les problèmes d'inhomogénéités, (Moschovidis and Mura, 1975), (Fond et al., 2002), doit alors gérer correctement le travail des efforts "extérieurs". En effet, la contrainte supplémentaire infinitésimale à l'infini/très loin de l'inhomogénéité ne peut jamais être considérée comme exactement nulle car le travail des efforts correspondants dans des déplacements de valeurs proportionnelles à la distance d'éloignement sur un contour de surface de taille proportionnelle au carré de la distance d'éloignement sera généralement fini et non nul.

$R_{int}(m)$	$R(m)$	$\frac{U_r(R)-U_{r0}(R)}{U_{r0}(R)} (-)$	$\frac{\sigma_{rr}(R)-\sigma_{rr0}(R)}{\sigma_{rr}(R)} (-)$	$W - W_0(J)$
1	10	$+1.625 \times 10^{-3}$	-1.0×10^{-3}	1.56671
1	100	$+1.625 \times 10^{-6}$	-1.0×10^{-6}	1.57079
1	1000	$+1.625 \times 10^{-9}$	-1.0×10^{-9}	1.57081

Table 1: Énergie supplémentaire correspondant aux paramètres donnés dans 3.1 pour un rayon croissant R du contour d'intégration, dont la surface est $4\pi R^2$, dans un domaine infini dans le cas du calcul par la M. I. E. $U_{r0} = \epsilon_{ii}^\infty \times R$ et $\sigma_{rr0} = \sigma_{ii}^\infty$ désignent la situation en absence de cavité.

⁶Sur un contour imaginaire d'intégration, suffisamment loin de l'inhomogénéité.

4. Méthode de l'inclusion équivalente (M. I. E.)

4.1. Notations

La M. I. E., voir Appendix B, a initialement été proposée par (Eshelby, 1957). Pour plusieurs inclusions/inhomogénéités (Moschovidis and Mura, 1975), (Yu et al., 2021), (Yan et al., 2021), elle utilise généralement comme base fonctionnelle des déformations libres de contraintes distribuées selon des séries de Taylor dans des inclusions/inhomogénéités⁷ et se situe entre une méthode de Galerkin et une méthode de collocation (Brisard et al., 2014). Le supplément d'énergie élastique associé à la présence d'une inclusion, comparée à l'énergie de déformation élastique du même milieu élastique qui ne contiendrait pas d'inclusion, a été calculé par ce même auteur. Ce calcul a été repris par de nombreux auteurs (Mura, 1993). Considérons donc une solution exacte pour une déformation libre de contrainte $\underline{\underline{\beta}}^p$ dans un domaine de matrice désigné par \mathcal{D}_p et de volume V_p , voir Fig. 1. Ce domaine de matrice \mathcal{D}_p ayant subit cette déformation libre est nommé inclusion. Désignons par $\underline{\underline{U}}^{\mathcal{C}^p \beta^p}$ et $\underline{\underline{\epsilon}}^{\mathcal{A}^p \beta^p} = \underline{\underline{\mathcal{A}}}^p \underline{\underline{\beta}}^p$ respectivement les champs de déplacements et de déformations associés à la déformation libre de contrainte $\underline{\underline{\beta}}^p$. $\underline{\underline{\mathcal{A}}}^p$, tenseur d'ordre 4, désigne le tenseur de localisation des déformations associé à la déformation libre $\underline{\underline{\beta}}^p$. $\underline{\underline{\mathcal{C}}}^p$, tenseur d'ordre 3, désigne le tenseur de localisation des déplacements associé à la déformation libre $\underline{\underline{\beta}}^p$ ⁸. Le champ des contraintes à l'intérieur de l'inclusion p est donné par $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathcal{A}^p \beta^p} = \underline{\underline{\mathcal{C}}}^0 (\underline{\underline{\epsilon}}^{\mathcal{A}^p \beta^p} - \underline{\underline{\beta}}^p)$ et à l'extérieur de l'inclusion par $\underline{\underline{\sigma}}^{\mathcal{A}^p \beta^p} = \underline{\underline{\mathcal{C}}}^0 \underline{\underline{\epsilon}}^{\mathcal{A}^p \beta^p}$ puisque $\underline{\underline{\beta}}^p = \underline{\underline{0}}$ à l'extérieur de l'inclusion.

⁷Ellipsoïdales afin de disposer de solutions analytiques.

⁸Notons que $\underline{\underline{\mathcal{A}}}^p = \frac{1}{2}(\underline{\underline{grad}}[\underline{\underline{\mathcal{C}}}^p] + \underline{\underline{grad}}^T[\underline{\underline{\mathcal{C}}}^p])$.

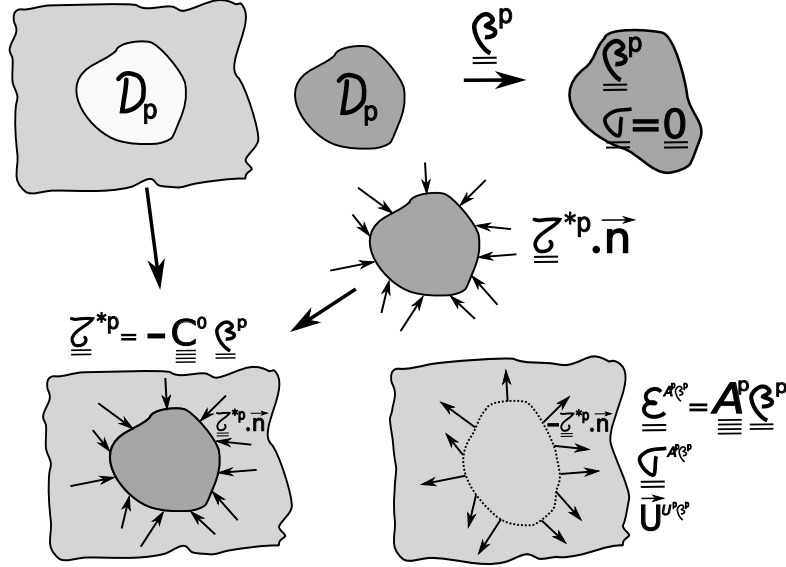


Figure 1: Un domaine p d'une matrice homogène subit une déformation libre de contrainte $\underline{\underline{\beta}}^p$. Une action imaginaire extérieure $\underline{\underline{\tau}}^*p \cdot \vec{n}$ sur son contour lui redonnerait la forme avant qu'il avait avant de subir cette déformation libre de contrainte.

4.2. Évolution des champs loin de l'inclusion

On connaît les solutions exactes $\underline{\underline{A}}^p$, en domaine infini, ou pour des espaces semi-infinis (Yang et al., 2021), pour des inclusions de forme ellipsoïdales soumises à des déformations libres de contrainte généralement distribuées selon des séries de Taylor (Ferrers, 1877), (Dyson et al., 1891), (Eshelby, 1957), (Moschovidis and Mura, 1975), Fond et al. (2001), Fond et al. (2002). Pour des formes quelconques, il faut utiliser des outils numériques (Nakasone et al., 2000) pour disposer d'une solution à ce type de problème. En pratique les domaines sont de très grande taille devant la taille des inclusions mais pas infinis. La plupart des démonstrations concernant le calcul du supplément d'énergie associée aux inclusions/hétérogénéités supposent que le champ des contraintes associé à ces solutions est auto-équilibré, i. e. qu'il n'y a pas d'effort extérieur associé à ce champ. Il n'y aurait donc pas de travail des efforts extérieurs aux frontières externes. Mais les solutions fournies pour des domaines infinis correspondent à des conditions aux limites mixtes pour lesquelles ni les déplacements ni les contraintes ne s'annulent jamais exactement lorsqu'on s'éloigne de l'inclusion bien qu'ils tendent vers zéro. Remarquons donc que, pour des solutions en domaine infini de cas de

déformations libres, les déplacements varient en $\frac{1}{L^2}$ et les contraintes et déformations varient en $\frac{1}{L^3}$, où L désigne la distance au centre de l'inclusion. Sous les H. P. P., il est pertinent de superposer à ces champs des champs uniformes de déformation ou contrainte pour, entre autres, estimer les propriétés élastique homogénéisées⁹. Désignant par $\underline{\underline{\epsilon}}^\infty$ une déformation imposée uniforme finie quelconque, les déplacements aux frontières \overrightarrow{U}^L sont proportionnels à la taille L du domaine considéré. L'intégrale de surface, cette dernière étant de taille proportionnelle à L^2 , tend vers une valeur finie ΔW_p lorsqu'on considère un milieu de grande taille L devant la taille a de l'inclusion, i. e. $\iint_{S_{ext.}} [\underline{\underline{\sigma}}^{A^p \beta^p} \cdot \overrightarrow{n}] \cdot \overrightarrow{U}^L dS \propto \frac{1}{L^3} L \times L^2 \neq 0$.

4.3. Satisfaction des conditions aux limites en moyenne

Ceci explique qu'en superposant la solution analytique - que l'on nommera perturbation de champs, voir les Fig. C.3 et C.4 - à une déformation uniforme $\underline{\underline{\epsilon}}^\infty$, on n'obtienne pas directement des conditions voulues ni celles qui permettent d'annuler le travail des perturbations de champs aux frontières éloignées. Afin de retrouver les conditions aux limites voulues à l'issue de la superposition, il convient de retrancher à $\underline{\underline{\epsilon}}^\infty$ la moyenne des déformations associée à la perturbation de champ que l'on désignera par $\underline{\underline{\epsilon}}^{<>} = \langle \underline{\underline{A}}^p \cdot \underline{\underline{\beta}}^p \rangle_{\mathcal{D}}$, $\langle \rangle_{\mathcal{D}}$ désignant la moyenne sur le domaine \mathcal{D} . Pour un domaine cubique, le résultat ne fournira pas une surface déformée plane mais presque plane, comme le montre la Fig .C.3, et d'autant plus plane que le cube sera grand comparé à la taille de l'inclusion. Reprenons donc les calculs de Appendix B en imposant au second membre de l'éq. B.2 $(\underline{\underline{\epsilon}}^\infty - \underline{\underline{\epsilon}}^{<>})$ de sorte que l'on résolve l'équation $([\underline{\underline{C}}^0 - \underline{\underline{C}}^p]^{-1} \cdot [\underline{\underline{C}}^0] - \underline{\underline{A}}^p) \cdot \underline{\underline{\beta}}^p = (\underline{\underline{\epsilon}}^\infty - \underline{\underline{\epsilon}}^{<>})$. On notera que $\underline{\underline{\epsilon}}^{<>} \rightarrow \underline{\underline{0}}$ lorsque $L \rightarrow \infty$.

5. Démonstration

Si l'on impose $(\underline{\underline{\epsilon}}^\infty - \underline{\underline{\epsilon}}^{<>})$, l'énergie de déformation W vaut :

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} (\underline{\underline{\epsilon}}^\infty - \underline{\underline{\epsilon}}^{<>} + \underline{\underline{\epsilon}}^{A^p \beta^p}) : \underline{\underline{C}}^0 \cdot (\underline{\underline{\epsilon}}^\infty - \underline{\underline{\epsilon}}^{<>} + \underline{\underline{\epsilon}}^{A^p \beta^p} - \underline{\underline{\beta}}^p) dv \quad (1)$$

⁹Tant que physiquement les déformations libres de contrainte ne modifie pas l'élasticité des inclusions.

où $\underline{\underline{\epsilon^{A^p \beta^p}}} = \underline{\underline{A^p}} \cdot \underline{\underline{\beta^p}}$. En développant on obtient :

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\epsilon^\infty}} : \underline{\underline{C^0}} \cdot \underline{\underline{\epsilon^\infty}} dv - \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\epsilon^\infty}} : \underline{\underline{C^0}} \cdot \underline{\underline{\beta^p}} dv \\
&+ \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\epsilon^\infty}} : \underline{\underline{C^0}} \cdot \underline{\underline{\epsilon^{A^p \beta^p}}} dv - \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\epsilon^\infty}} : \underline{\underline{C^0}} \cdot \underline{\underline{\epsilon^{<>}}} dv \\
&- \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\epsilon^{<>}}} : \underline{\underline{C^0}} \cdot \underline{\underline{\epsilon^\infty}} dv + \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\epsilon^{<>}}} : \underline{\underline{C^0}} \cdot \underline{\underline{\epsilon^{<>}}} dv \\
&- \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\epsilon^{<>}}} : \underline{\underline{C^0}} \cdot \underline{\underline{\epsilon^{A^p \beta^p}}} dv + \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\epsilon^{<>}}} : \underline{\underline{C^0}} \cdot \underline{\underline{\beta^p}} dv \\
&+ \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\epsilon^{A^p \beta^p}}} : \underline{\underline{C^0}} \cdot \underline{\underline{\epsilon^\infty}} dv - \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\epsilon^{A^p \beta^p}}} : \underline{\underline{C^0}} \cdot \underline{\underline{\epsilon^{<>}}} dv \\
&+ \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\epsilon^{A^p \beta^p}}} : \underline{\underline{C^0}} \cdot \underline{\underline{\epsilon^{A^p \beta^p}}} dv - \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\epsilon^{A^p \beta^p}}} : \underline{\underline{C^0}} \cdot \underline{\underline{\beta^p}} dv
\end{aligned} \tag{2}$$

La première ligne donne $W_0 - \Delta W_p$ puisque la déformation libre est nulle en dehors de l'inclusion, i. e. $\iint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\beta^p}} dv = \iint_{\mathcal{D}_p} \underline{\underline{\beta^p}} dv$. On remarque ensuite que les champs uniformes peuvent être sortis de l'intégrale de sorte que :

$$\iiint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\epsilon^{<>}}} : \underline{\underline{C^0}} \cdot \underline{\underline{\epsilon^{A^p \beta^p}}} dv = \underline{\underline{\epsilon^{<>}}} : \underline{\underline{C^0}} \cdot \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\epsilon^{A^p \beta^p}}} dv = V_0 \underline{\underline{\epsilon^{<>}}} : \underline{\underline{C^0}} \cdot \underline{\underline{\epsilon^{<>}}} dv \tag{3}$$

puisque $\frac{1}{V_0} \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\epsilon^{A^p \beta^p}}} dv = \underline{\underline{\epsilon^{<>}}}$. De même :

$$\iiint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\epsilon^\infty}} : \underline{\underline{C^0}} \cdot \underline{\underline{\epsilon^{A^p \beta^p}}} dv = V_0 \underline{\underline{\epsilon^\infty}} : \underline{\underline{C^0}} \cdot \underline{\underline{\epsilon^{<>}}} dv \tag{4}$$

Du fait des symétries tensorielles¹⁰, l'éq. 1 devient donc :

$$\begin{aligned}
W &= W_0 - \Delta W_p \\
&+ \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\epsilon^{<>}}} : \underline{\underline{C^0}} \cdot \underline{\underline{\beta^p}} dv - \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\epsilon^{A^p \beta^p}}} : \underline{\underline{C^0}} \cdot \underline{\underline{\beta^p}} dv \\
&+ \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\epsilon^{A^p \beta^p}}} : \underline{\underline{C^0}} \cdot \underline{\underline{\epsilon^{A^p \beta^p}}} dv - \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\epsilon^{A^p \beta^p}}} : \underline{\underline{C^0}} \cdot \underline{\underline{\epsilon^{<>}}} dv
\end{aligned} \tag{5}$$

¹⁰ $\underline{\underline{\epsilon^1}} : \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\epsilon^2}} = \underline{\underline{\epsilon^2}} : \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\epsilon^1}}$

Rappelons que $\underline{\underline{\underline{\tau^{*p}}}} = -\underline{\underline{\underline{C^0}}}\cdot\underline{\underline{\underline{\beta^p}}}$, comme le travail des efforts intérieurs est égal au travail des efforts extérieurs, il vient :

$$-\iiint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\underline{\epsilon^{Ap\beta^p}}}} : \underline{\underline{\underline{C^0}}}\cdot\underline{\underline{\underline{\beta^p}}} dv = \iiint_{\mathcal{D}_p} \underline{\underline{\underline{\epsilon^{Ap\beta^p}}}} : \underline{\underline{\underline{\tau^{*p}}}} dv = \iint_{\partial\mathcal{D}_p} \overline{U^{C^p\beta^p}} \cdot (\underline{\underline{\underline{\tau^{*p}}}} \cdot \overline{\vec{n}}) ds \quad (6)$$

où $\partial\mathcal{D}_p$ désigne la surface du domaine \mathcal{D}_p . Toujours en vertu de l'égalité du travail des efforts intérieurs et des efforts extérieurs, voir Fig. 1, il vient :

$$\begin{aligned} & \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\underline{\epsilon^{Ap\beta^p}}}} : \underline{\underline{\underline{C^0}}}\cdot\underline{\underline{\underline{\epsilon^{Ap\beta^p}}}} dv \\ &= \iint_{\partial\mathcal{D}_p} \overline{U^{C^p\beta^p}} \cdot (\underline{\underline{\underline{\tau^{*p}}}} \cdot \overline{\vec{n}}) ds + \iint_{\partial\mathcal{D}} \overline{U^{C^p\beta^p}} \cdot (\underline{\underline{\underline{C^0}}}\cdot\underline{\underline{\underline{\epsilon^{Ap\beta^p}}}} \cdot \overline{\vec{n}}) ds \\ &= \iint_{\partial\mathcal{D}_p} \overline{U^{C^p\beta^p}} \cdot (\underline{\underline{\underline{\tau^{*p}}}} \cdot \overline{\vec{n}}) ds + \iint_{\partial\mathcal{D}} \overline{U^{C^p\beta^p}} \cdot (\underline{\underline{\underline{\sigma^{Ap\beta^p}}}} \cdot \overline{\vec{n}}) ds \end{aligned} \quad (7)$$

Puisque $\underline{\underline{\underline{\beta^p}}} = \underline{\underline{\underline{0}}}$ en dehors de \mathcal{D}_p :

$$\iiint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\underline{\epsilon^{<>}}}} : \underline{\underline{\underline{C^0}}}\cdot\underline{\underline{\underline{\beta^p}}} dv = \underline{\underline{\underline{\epsilon^{<>}}}} : \iiint_{\mathcal{D}_p} \underline{\underline{\underline{C^0}}}\cdot\underline{\underline{\underline{\beta^p}}} dv \quad (8)$$

puis enfin :

$$\iiint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\underline{\epsilon^{Ap\beta^p}}}} : \underline{\underline{\underline{C^0}}}\cdot\underline{\underline{\underline{\epsilon^{<>}}}} dv = V_0 \underline{\underline{\underline{\epsilon^{<>}}}} : \underline{\underline{\underline{C^0}}}\cdot\underline{\underline{\underline{\epsilon^{<>}}}} \quad (9)$$

On aboutit donc à :

$$\begin{aligned} W &= W_0 - \Delta W_p \\ &+ \frac{1}{2} \underline{\underline{\underline{\epsilon^{<>}}}} : \iiint_{\mathcal{D}_p} \underline{\underline{\underline{C^0}}}\cdot\underline{\underline{\underline{\beta^p}}} dv \\ &\quad - \frac{1}{2} V_0 \underline{\underline{\underline{\epsilon^{<>}}}} : \underline{\underline{\underline{C^0}}}\cdot\underline{\underline{\underline{\epsilon^{<>}}}} \\ &+ \frac{1}{2} \iint_{\partial\mathcal{D}} \overline{U^{C^p\beta^p}} \cdot (\underline{\underline{\underline{\sigma^{Ap\beta^p}}}} \cdot \overline{\vec{n}}) ds \end{aligned} \quad (10)$$

Pour un domaine fini de grande taille L devant la taille de l'inclusion, étant donné que loin de l'inclusion $\overrightarrow{U^{C^p\beta^p}} \propto \frac{1}{L^2}$, $\underline{\underline{\epsilon^{<>}}} \propto \frac{1}{L^3}$, $\underline{\underline{\sigma^{A^p\beta^p}}} \propto \frac{1}{L^3}$, $V_0 \propto L^3$, $\partial\mathcal{D} \propto L^2$ et que $\iiint_{\mathcal{D}_p} \underline{\underline{\beta^p}} dv$ est une constante, on peut affirmer que :

$$\begin{aligned} V_0 \underline{\underline{\epsilon^{<>}}} : \underline{\underline{C^0}} \cdot \underline{\underline{\epsilon^{<>}}} &\rightarrow 0 \text{ quand } L \rightarrow \infty \\ \underline{\underline{\epsilon^{<>}}} : \iiint_{\mathcal{D}_p} \underline{\underline{C^0}} \cdot \underline{\underline{\beta^p}} dv &\rightarrow 0 \text{ quand } L \rightarrow \infty \\ \iint_{\partial\mathcal{D}} \overrightarrow{U^{C^p\beta^p}} \cdot (\underline{\underline{\sigma^{A^p\beta^p}}} \cdot \vec{n}) ds &\rightarrow 0 \text{ quand } L \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (11)$$

D'où l'on déduit finalement que :

$$W \approx W_0 - \Delta W_p \text{ quand } L \rightarrow \infty \quad (12)$$

en prenant la précaution pour des calculs numériques concernant des domaines finis de grandes taille devant celle de l'inclusion, de considérer que l'on superpose $\underline{\underline{\epsilon^{A^p\beta^p}}}$ et $(\underline{\underline{\epsilon^\infty}} - \underline{\underline{\epsilon^{<>}}})$ et non seulement $\underline{\underline{\epsilon^\infty}}$.

6. Illustration numérique

6.1. Calcul classique

Considérons par souci de simplicité un cube de dimension $2L \times 2L \times 2L$ centré sur une inclusion sphérique de rayon a comme l'illustre la Fig. 2. Considérons un cas quelconque d'élasticité linéaire isotrope dans le cadre des H. P. P. Par exemple $E^0 = 1 \text{ u.a.}$ ¹¹ et $\nu^0 = 0.3$ pour la matrice et $E^p = 0.5 \times E^0$ et $\nu^p = 0.1$ pour l'inhomogénéité p . Calculons le travail des efforts extérieurs pour une traction uniaxiale d'axe \vec{z} $\epsilon_{33}^\infty = 1$ axée sur le cube¹². La déformation libre correspondant à la solution de la méthode de l'inclusion équivalente est $\beta_{11} = \beta_{22} = 0.0335$ et $\beta_{33} = 0.62687$, les autres termes étant nuls. Déformations et contraintes dans l'inclusion équivalente sont uniformes

¹¹u.a. pour unité arbitraire.

¹²Tous les résultats sont proportionnels à ϵ^∞ de sorte que pour une petite déformation il suffit d'appliquer un coefficient multiplicateur petit devant l'unité.

et valent respectivement $\epsilon_{11}^{\mathcal{A}^p\beta^p} = \epsilon_{22}^{\mathcal{A}^p\beta^p} = 0.0107$, $\epsilon_{33}^{\mathcal{A}^p\beta^p} = 0.325$, $\sigma_{11}^{\mathcal{A}^p\beta^p} = \sigma_{22}^{\mathcal{A}^p\beta^p} = 0.0208$ u. a., $\sigma_{33}^{\mathcal{A}^p\beta^p} = 0.4498$ u. a.. Pour l'inhomogénéité on obtient $\sigma_{11}^{\mathcal{A}^p\beta^p} = \sigma_{22}^{\mathcal{A}^p\beta^p} = 0.024$ u. a., $\sigma_{33}^{\mathcal{A}^p\beta^p} = 0.1675$ u. a., les déformations étant les mêmes que pour l'inclusion équivalente. L'énergie de déformation est fournie dans la Table 2 en fonction de L . Elle est calculée à partir de la solution analytique en domaine infini et par intégration numérique de 500×500 points par face du cube. On désigne par $W_0 = \frac{1}{2}V_0\underline{\underline{\epsilon}}^\infty : \underline{\underline{\sigma}}^\infty = \frac{1}{2}V_0\underline{\underline{\epsilon}}^\infty : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^0.\underline{\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}}^\infty$ - où V_0 désigne le volume total du domaine - l'énergie de déformation élastique du même domaine qui ne contiendrait pas d'inclusion. Calculons maintenant le

L/a (-)	W (u. a.)	$W - W_0$ (u. a.)
3	108.216328100416	0.216328100416
10	4000.24628599888	0.24628599888
100	4000000.24851483	0.24851483
1000	4000000000.25054	0.25054

Table 2: Énergie de déformation et supplément d'énergie en fonction de la dimension du cube contenant l'inhomogénéité.

supplément d'énergie avec la formule classique $\Delta W_p = \pm \frac{1}{2}V_p\underline{\underline{\sigma}}^\infty : \underline{\underline{\beta}}^p$ (Eshelby, 1957). $V_p = \pm \frac{4}{3}\pi a^3$ et $\sigma_{33}^\infty = 1$ u. a., les autres contraintes étant nulles en traction uniaxiale. On obtient $\Delta W_p = -1.3213$ u. a. pour des conditions aux limites définies en déplacements et $\Delta W_p = +1.3213$ u. a. pour des conditions aux limites définies en efforts. Cela ne correspond pas aux valeurs de la Table 2 qui estiment la valeur à $+0.25$ u. a. au lieu de -1.32 u. a..

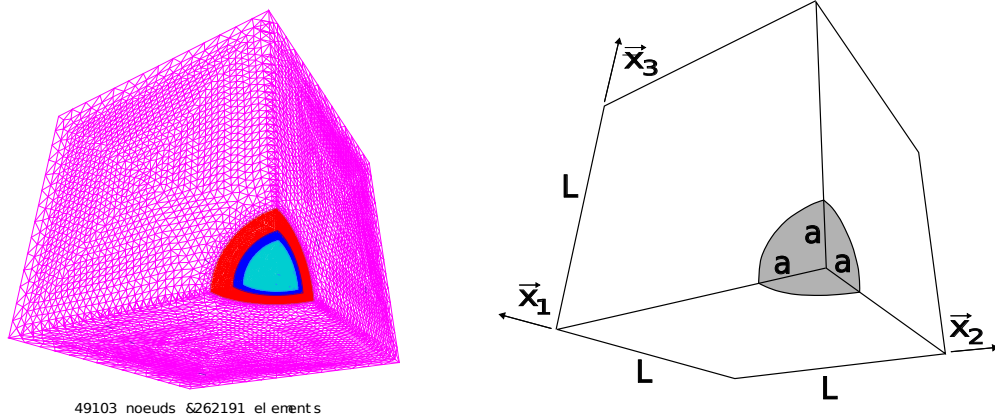


Figure 2: À gauche : discrétisation spatiale du modèle par éléments finis utilisé pour un cube de dimensions 20 fois le rayon d’une inclusion sphérique, centré sur cette inclusion. Toutes les symétries sont exploitées de sorte que seule $1/8^{eme}$ du volume constitue le modèle géométrique pour une traction uniaxiale. À droite : représentation schématique d’une coupe d’un cube de dimensions L centré sur une inclusion sphérique de rayon a et orienté selon les axes du repère.

6.2. Ajustement des conditions aux limites

Étant donné que $\epsilon_{33}^{<>} \approx 2.0^{-4}$, imposons $\epsilon_{33}^{\infty} = 0.9998$ au lieu de l’unité, l’énergie de déformation calculée à l’instar du calcul précédent donne $W = 3998.7 u. a.$. Le supplément d’énergie vaut $\Delta W_p = \pm \frac{1}{2} V_p \underline{\underline{\underline{C^0}}} : \underline{\underline{\underline{\epsilon^\infty}}} \beta^p = -1.3 u. a.$. On retrouve bien dans ce cas la prédiction théorique pour un domaine fini de grande taille devant celle de l’inclusion bien que les contraintes ne soient pas nulles aux frontières et que celles-ci travaillent dans les déplacements imposés. Il convient donc de chercher à estimer la précision que l’on peut attendre en domaines finis en utilisant des solutions analytiques exactes valables pour des domaines infinis. Le terme $\frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}_p} \underline{\underline{\underline{\epsilon^{Ap\beta^p}}} : \underline{\underline{\underline{C^0}}} : \underline{\underline{\underline{\beta^p}}} dv$ n’est pas négligeable et vaut $0.554 u. a.$. De même, le terme $\frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}_p} \underline{\underline{\underline{\epsilon^{<>}}} : \underline{\underline{\underline{\sigma^\infty}}} ds$ qui vaut $0.08 u. a.$ et le terme $\frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}_p} \underline{\underline{\underline{\epsilon^\infty}}} : \underline{\underline{\underline{\sigma^{<>}}} ds$ qui vaut $-0.14 u. a.$ peuvent entacher la précision de résultats.

6.3. Modèle par éléments finis

La méthode des éléments finis permet des comparaisons de résultats numériques aisées (Novák et al., 2012). Afin de parachever les vérifications numériques, un modèle par éléments finis avec le logiciel CAST3M (CAST3M, 2022) est mis en œuvre pour les mêmes dimensions géométriques

et les mêmes caractéristiques élastiques de la matrice et de l'inhomogénéité. La discrétisation spatiale est montrée en Fig. 2. Elle utilise des 262191 tétraèdres à 4 nœuds pour 147309 degrés de liberté. Les conditions aux limites sont imposées en déplacement de sorte que les faces du cube restent planes. L'énergie de déformation W vaut 3998.69 *u. a.*. Le terme $\frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}_p} \underline{\underline{\underline{\beta^p}}} : \underline{\underline{\underline{C^0}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\epsilon^\infty}}} dv$ vaut 1.30904 *u. a.* et le terme $\frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\underline{\epsilon^{A^p\beta^p}}} : \underline{\underline{\underline{C^0}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\epsilon^{A^p\beta^p}}} dv$ vaut 0.5546 *u. a.*. Ces résultats sont conformes aux attentes et valident les calculs théoriques précédents. D'autres résultats obtenus par éléments finis sont comparés en Appendix C à la solution exacte en domaines infinis.

7. Cas des inhomogénéités élastiques et des interactions mécaniques entre inclusions/inhomogénéités

L'équation d'équivalence est donnée en annexe Appendix B. Dans le cas de N inhomogénéités élastiques, il y a interaction entre inhomogénéités. En effet, dans le cas général chaque inhomogénéité "ressent" la présence de partie plus souple ou plus raide du milieu environnant. Les solutions exactes utilisées sont établies pour une matrice élastique homogène¹³. La simple superposition de leurs champs ne peut donc plus fournir une solution exacte. En effet, le champ de déformations induit par la présence d'une inhomogénéité à l'extérieur de cette inhomogénéité génère des discontinuités de contraintes aux interfaces des autres inhomogénéités.

$$\Delta_{\partial\mathcal{D}_q} \underline{\underline{\underline{\sigma^q}}} = (\underline{\underline{\underline{C^q}}} - \underline{\underline{\underline{C^0}}}) \cdot \underline{\underline{\underline{\epsilon^{A^p\beta^p}}}}_{\partial\mathcal{D}_q} \quad (13)$$

où $\partial\mathcal{D}_q$ désigne l'interface q^{me} -inhomogénéité/matrice, i. e. la frontière du domaine \mathcal{D}_q . Ces efforts "parasites" t_q^* sont donnés par :

$$\vec{t}_q^* = \Delta_{\partial\mathcal{D}_q} \underline{\underline{\underline{\sigma^q}}} \cdot \vec{n}_q \quad (14)$$

Ces efforts "parasites" peuvent être vus comme des efforts extérieurs agissant sur les contours des inhomogénéités (Benedikt et al., 2006), (Brisard

¹³Liées aux fonctions de Green.

et al., 2014). Il a été proposé dans Fond et al. (2002) d'évaluer la qualité de la solution fournie par la méthode de l'inclusion équivalente proposée par (Moschovidis and Mura, 1975) en faisant travailler ces efforts parasites dans les déplacements des contours des inhomogénéités. Cet estimateur fournit un supplément d'énergie de déformation W^* que l'on souhaite le plus petit possible devant la totalité des suppléments d'énergie de déformation.

$$W^* = \sum_{q=1}^N = \sum_{q=1}^N W_q^* = \iint \partial \mathcal{D}_q \vec{t}_q^* \vec{U} ds \quad (15)$$

où \vec{U} désigne le champ de déplacement total, i. e. $\vec{U} = \vec{U}^\infty + \sum_{p=1}^N \overline{U^{\mathcal{A}^p \beta^p}}$ pour N inhomogénéités. La solution sera considérée comme globalement convenable si $W^* \ll |W - W_0|$ et localement convenable si $|W_q^*| \ll |\Delta W^q|^{14}$. Sur les frontières éloignées, i. e. sur $\partial \mathcal{D}$, il n'y a pas de problème d'admissibilité statique mais simplement des conditions aux frontières imparfaites ($(\sum_{p=1}^N \underline{\underline{\sigma^{\mathcal{A}^p \beta^p}}}) \cdot \vec{n}_{\partial \mathcal{D}}$ et $\sum_{p=1}^N \overline{U^{\mathcal{A}^p \beta^p}}$) en regard de ce que l'on souhaite imposer.

La solution fournie pour plusieurs inhomogénéités en interaction n'est donc, sauf cas particuliers, pas statiquement admissible. Toutefois, on peut considérer la solution fournie comme exacte et totalement admissible avec des conditions aux frontières imparfaites, les contours $\partial \mathcal{D}_p$ des inhomogénéités étant considérés comme des frontières de même que les contours $\partial \mathcal{D}$ du domaine \mathcal{D} qui les contient.

8. Discussion

J'ai montré ici qu'il convient d'annuler le supplément de contraintes moyennes aux frontières éloignées pour retrouver les résultats de la démonstration classique qui les suppose nulles. Une démonstration analogue peut être faite pour chercher à satisfaire en moyenne des conditions en contrainte aux frontières éloignées en cherchant à annuler le supplément de déplacement moyen. En effet, pour un cube de volume $V_0 = 80000(\frac{L}{a})^3$ noyé dans un domaine infini,

¹⁴Les valeurs absolues s'imposent du fait que, selon les conditions aux limites et les raideurs, les suppléments d'énergie peuvent être positifs ou négatifs.

donc une énergie élastique de déformation de ce cube valant $W_0 = 40000 u. a.$ et en reprenant les valeurs du cas précédemment étudié, on obtient, en imposant $\epsilon_{33} = 1$ dans B.1, sur les faces perpendiculaires à l'axe de traction pour les déplacements moyens $1.00001952 * L$ et la contrainte σ_{33} moyenne $0.99998463 u. a.$. Afin d'ajuster en moyenne les conditions aux frontières pour obtenir $\langle \epsilon_{33} \rangle = 1$ il faut multiplier $\underline{\underline{\epsilon}}^\infty$ par un coefficient valant 0.9999805 . De même, afin d'obtenir $\langle \sigma_{33} \rangle = 1 u. a.$ il faut multiplier $\underline{\underline{\epsilon}}^\infty$ par un coefficient valant 1.00001537 . La Table 3 montre qu'effectivement on tend vers les valeurs théoriques en domaine infini en ajustant convenablement les conditions aux limites.

$L/a (-)$	coefficient	$W (u. a.)$	$W - W_0 (u. a.)$
21.5443469	0.9999805	39998.69	-1.31
21.5443469	1.0000154	40001.48	+1.48

Table 3: Énergie de déformation et supplément d'énergie en fonction de coefficient multiplicateur pour un cube contenant l'inhomogénéité.

9. Conclusion

Il est donc clair que la mise en œuvre numériques de solution adaptée aux domaines infinis doit être traitée avec vigilance lorsqu'on envisage des problèmes en domaines très grands - mais finis - devant la taille des inhomogénéités. En effet, la très légère correction proposée ici à effectuer sur le chargement, même si elle peut paraître négligeable, est indispensable à l'obtention des résultats souhaités. Il est démontré ici que les termes $\Delta W_p/W_0$ sont du même ordre de grandeur que les termes correctifs de $\underline{\underline{\epsilon}}^{\langle \rangle} / \underline{\underline{\epsilon}}^\infty$ quelle que soit la taille d'un domaine fini. Par ailleurs, une fois ces aspects bien maîtrisés, il est loisible d'envisager le développement d'une approche par méthode variationnelle alternative à la M. I. E. proposée par (Moschovidis and Mura, 1975), (Hashin and Shtrikman, 1962), (Hill, 1963). En effet, tout en utilisant la même base fonctionnelle issue de solutions analytiques exactes, on peut espérer obtenir de meilleurs résultats numériques en cherchant à minimiser l'énergie de déformation puisque cela revient à minimiser les discontinuités de contraintes aux interfaces des inhomogénéités.

Appendix A. Une sphère creuse sous pression

Considérant de petites déformations en élasticité linéaire et de petits déplacements (H. P. P.), la solution analytique pour une sphère creuse de rayon interne R_{int} et de rayon externe R_{ext} sous pression interne p_{int} et pression externe p_{ext} est donnée par :

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{p_{int}R_{int}^3 - p_{ext}R_{ext}^3}{R_{ext}^3 - R_{int}^3} - \frac{(p_{int} - p_{ext})R_{int}^3 R_{ext}^3}{(R_{ext}^3 - R_{int}^3)r^3} \quad (\text{A.1})$$

où r est la distance au centre de la sphère et σ_{rr} la contrainte radiale. Le déplacement U_r à une distance r est donné par :

$$U_r(r) = \frac{r}{2\mu + 3\lambda} \frac{p_{int}R_{int}^3 - p_{ext}R_{ext}^3}{R_{ext}^3 - R_{int}^3} + \frac{1}{4\mu} \frac{(p_{int} - p_{ext})R_{int}^3 R_{ext}^3}{(R_{ext}^3 - R_{int}^3)r^2} \quad (\text{A.2})$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé. L'énergie de déformation calculée à partir du travail des efforts extérieurs est donnée par :

$$W = \frac{1}{2}p_{int}U_r(R_{int}) + \frac{1}{2}p_{ext}U_r(R_{ext}) \quad (\text{A.3})$$

Appendix B. Équation d'équivalence

Rappelons l'équation d'équivalence (Eshelby, 1957) :

$$\underline{\underline{C}}^0(\underline{\underline{\epsilon}}^\infty + \underline{\underline{A}}^p \cdot \underline{\underline{\beta}}^p - \underline{\underline{\beta}}^p) = \underline{\underline{C}}^p(\underline{\underline{\epsilon}}^\infty + \underline{\underline{A}}^p \cdot \underline{\underline{\beta}}^p) \quad (\text{B.1})$$

qui peut se réécrire :

$$([\underline{\underline{C}}^0 - \underline{\underline{C}}^p]^{-1} \cdot [\underline{\underline{C}}^0] - \underline{\underline{A}}^p) \cdot \underline{\underline{\beta}}^p = \underline{\underline{\epsilon}}^\infty \quad (\text{B.2})$$

Appendix C. Exemple de champs au loin de l'inclusion

Pour le cas de l'exemple cité en section 6, les Fig. C.3 et C.4 fournissent respectivement les perturbations, sur la face du cube correspondant à $x_3 = 10a$, du champs de déplacements U_3 et de la contrainte σ_{33} , liées à la présence d'une inhomogénéité élastique. Ces perturbations correspondent à la solution analytique calculée pour des domaines infinis.

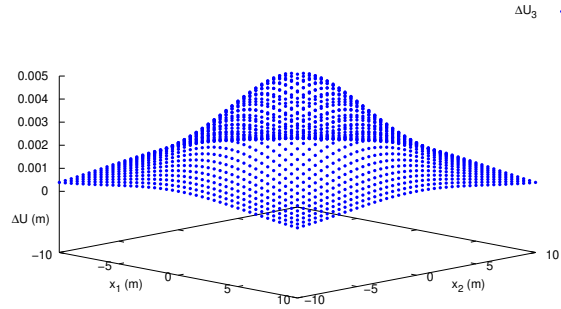


Figure C.3: Perturbations à $x_3 = 10a$ du champ de déplacements U_3 liée à la présence d'une inhomogénéité élastique de rayon a .

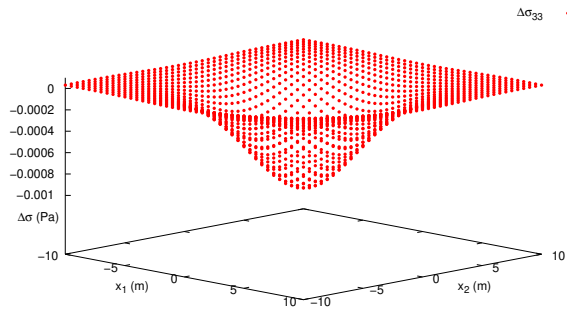


Figure C.4: Perturbations à $x_3 = 10a$ du champ de contraintes σ_{33} liée à la présence d'une inhomogénéité élastique de rayon a .

Les Fig. C.5 et C.6 compare des résultats obtenus pour la solution analytique en domaine infini et pour le modèle par éléments finis. Les résultats de la solution analytique sont calculés pour satisfaire des conditions de déformations moyennes sur le domaine fini \mathcal{D} , i. e. $\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_{\mathcal{D}} = \underline{\underline{\epsilon}}^\infty$ ou pour satisfaire ces conditions sur un domaine infini, i. e. $\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_{\text{domaine infini}} = \underline{\underline{\epsilon}}^\infty$.

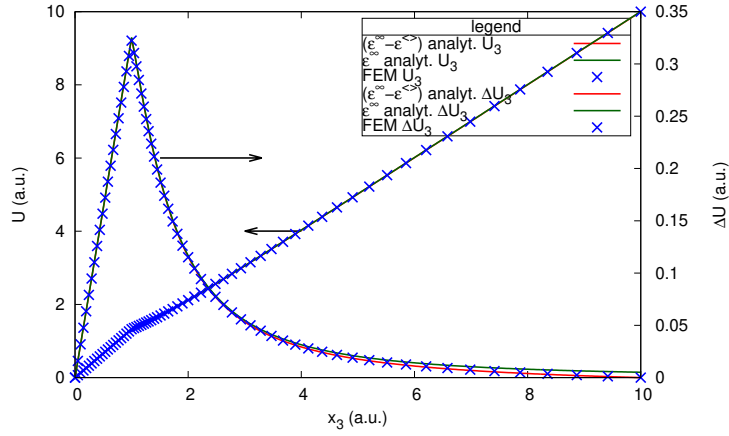


Figure C.5: Comparaisons des résultats concernant les déplacements U_3 long de de l'axe x_3 , pour $x_1 = x_2 = 0$, de la solution analytique et du modèle par éléments finis. $\Delta U_3 = U_3 - \langle \epsilon_{33} \rangle x_3$.

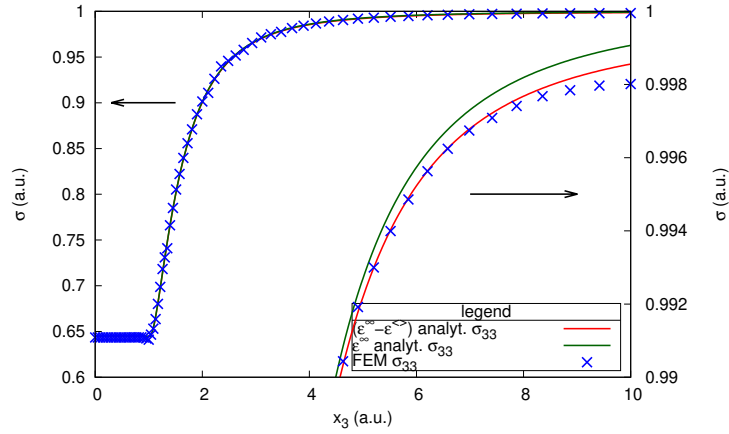


Figure C.6: Comparaisons des résultats concernant les contraintes σ_{33} long de de l'axe x_3 , pour $x_1 = x_2 = 0$, de la solution analytique et du modèle par éléments finis.

References

Benedikt, B., Lewis, M., Rangaswamy, P., 2006. On elastic interactions between spherical inclusions by the equivalent inclusion method. Computational Materials Science 37, 380–392.

- Benveniste, Y., 1987. A new approach to the application of mori-tanaka's theory in composite materials. *Mechanics of Materials* 6, 147–157.
- Berthaud, Y., Fond, C., Brun, P., 1994. Interactions between cracks and circular holes in bidimensionnal elastic media. *Mechanics Research Communications* 21, 525–533.
- Brisard, S., Dormieux, L., Sab, K., 2014. A variational form of the equivalent inclusion method for numerical homogenization. *International Journal of Solids and Structures* 51, 716–728.
- Brisard, S., Sab, K., Dormieux, L., 2013. New boundary conditions for the computation of the apparent stiffness of statistical volume elements. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 61, 2638–2658.
- CAST3M, C.E.A., 2022. Logiciel de calculs aux elements finis, www-cast3m.cea.fr.
- Doghri, I., Brassart, L., Adam, L., Gérard, J.S., 2011. A second-moment incremental formulation for the mean-field homogenization of elasto-plastic composites. *International Journal of Plasticity* 27, 352–371.
- Dyson, F., et al., 1891. The potentials of ellipsoids of variable densities. *QJ Pure Appl. Math* 25, 259–288.
- Eshelby, J.D., 1957. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the royal society of London. Series A. Mathematical and physical sciences* 241, 376–396.
- Eshelby, J.D., 1959. The elastic field outside an ellipsoidal inclusion. *Proceedings of the royal society of London. Series A. Mathematical and physical sciences* 252, 561–569.
- Ferrers, N., 1877. On the potentials of ellipsoids, ellipsoidal shells, elliptic laminae and elliptic rings of variable densities. *QJ Pure Appl. Math* 14, 1–22.
- Fond, C., 2001. Cavitation criterion for rubber materials: a review of void-growth models. *Journal of Polymer Science, part B - Polymer Physics* 39, 2081–2096.

- Fond, C., Berthaud, Y., 1995. Extensions of the pseudo tractions technique for friction in cracks, circular cavities and external boundaries; effect of the interactions on the homogenised stiffness. *International Journal of Fracture* 74, 1–28.
- Fond, C., Flejou, J.L., Berthaud, Y., 1995. Interactions between cracks and circular holes in bidimensionnal elastic media. *European Journal of Mechanics A-solids* 14, 73–96.
- Fond, C., Gehant, S., Schirrer, R., 2002. Effects of mechanical interactions on the hydrostatic stress in randomly distributed rubber particles in an amorphous polymer matrix. *Polymer* 43, 909–919.
- Fond, C., Lobbrecht, A., Schirrer, R., 1996. Polymers toughened with rubber microspheres; an analytical solution for stresses and strains in the rubber particles at equilibrium and rupture. *International Journal of fracture* 77, 141–159.
- Fond, C., Riccardi, A., Schirrer, R., Montheillet, F., 2001. Mechanical interaction between spherical inhomogeneities: an assessment of a method based on the equivalent inclusion. *European Journal of Mechanics A-solids* 20, 59–75.
- Hashin, Z.a., Shtrikman, S., 1962. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 10, 335–342.
- Hill, R., 1963. New derivation of some elastic extremum principles. *Progress in applied mechanics, The Prager anniversary volume* , 99–106.
- Moschovidis, Z.A., Mura, T., 1975. Two-ellipsoidal inhomogeneities by the equivalent inclusion method. *Journal of Applied Mechanics* 42, 847–852.
- Mura, T., 1993. *Micromechanics of Defects in Solids*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London. revised edition, reprinted edition.
- Nakasone, Y., Nishiyama, H., Nojiri, T., 2000. Numerical equivalent inclusion method: a new computational method for analyzing stress fields in and around inclusions of various shapes. *Materials Science and Engineering: A* 285, 229–238.

- Novák, J., Łukasz Kaczmarczyk, Grassl, P., Zeman, J., Pearce, C.J., 2012. A micromechanics-enhanced finite element formulation for modelling heterogeneous materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 201-204, 53–64.
- Shodja, H., Rad, I., Soheilifard, R., 2003. Interacting cracks and ellipsoidal inhomogeneities by the equivalent inclusion method. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 51, 945–960.
- Xu, Y., Xiang, M., Yu, J., Tang, S., Chen, J., 2023. A variational fracture method based on eshelby transformation. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 97, 104846.
- Yan, Z., Zhang, M., Jiang, S., 2021. Numerical methods for solving the equivalent inclusion equation in semi-analytical models. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology* 235, 2455–2473.
- Yang, W., Zhou, Q., Wang, J., Khoo, B.C., Phan-Thien, N., 2021. Equivalent inclusion method for arbitrary cavities or cracks in an elastic infinite/semi-infinite space. *International Journal of Mechanical Sciences* 195, 106259.
- Yu, X.W., Wang, Z.W., Wang, H., 2021. Multiple ellipsoidal/elliptical inhomogeneities embedded in infinite matrix by equivalent inhomogeneous inclusion method. *Mathematics and Mechanics of Solids* , 108128652110071.