

THESE de DOCTORAT de l'UNIVERSITE PARIS 6

Spécialité :

MECANIQUE des SOLIDES et des STRUCTURES

présentée

à l'Université Pierre et Marie Curie

- PARIS 6 -

par **Christophe FOND**

pour obtenir le titre de :

DOCTEUR de l'UNIVERSITE PARIS 6

Sujet de la thèse:

**INTERACTIONS ENTRE FISSURES ET CAVITES CIRCULAIRES
DANS DES MILIEUX ELASTIQUES PLANS**

Soutenue le 11 juin 1992 devant le jury composé de :

J. P. HENRY	Président
A. EHRLACHER	Rapporteur
L. PROSLIER	Rapporteur
Y. BERTHAUD	Examineur
J. LEMAITRE	Examineur
R. SCHIRRER	Examineur
H. D. BUI	Membre invité

LABORATOIRE DE MECANIQUE ET TECHNOLOGIE

E.N.S. de CACHAN / C.N.R.S. / Université Pierre et Marie Curie

61, avenue du Président Wilson
94235 CACHAN cedex (FRANCE)

REMERCIEMENTS

Je suis reconnaissant à l'ensemble des personnels du L.M.T. pour la mise à disposition de leurs compétences. La liste exhaustive des personnes à qui je suis redevable serait trop longue pour figurer ici, mais j'exprime une reconnaissance toute particulière à Jean Luc Fléjou dont les connaissances informatiques (entre autres...) ont permis de mener ce travail à terme dans des délais raisonnables.

Merci à Jacky Mazars pour m'avoir ouvert les portes de la recherche.

Yves Berthaud m'a permis de trouver l'épanouissement dans mon travail.

TABLE DES MATIERES

LES MOTIVATIONS	1
1. LA METHODE PAR SUPERPOSITION	4
1. 1. INTRODUCTION.....	4
1. 2. DOMAINE D'APPLICATION ET PRINCIPE	4
1. 3. EXEMPLE.....	4
1. 4. APPLICATION NUMERIQUE.....	7
1. 5. FORMULATION GENERALE	8
1. 5. 1. DEFINITIONS	8
1. 5. 2. PRINCIPE DE SUPERPOSITION	8
1. 5. 3. DISCRETISATION.....	9
1. 6. DESCRIPTION DETAILLEE DE LA METHODE.....	11
1. 6. 1. COEFFICIENTS D'INFLUENCE.....	11
1. 6. 2. CALCUL DES FACTEURS D'INTENSITE DES CONTRAINTES.....	14
1. 7. MILIEUX INFINIS.....	16
1. 7. 1. ANALYSE CRITIQUE	16
1. 7. 2. VALIDATION DES RESULTATS EN MILIEUX INFINIS.....	17
1. 8. OUVERTURE DES FISSURES	20
1. 9. L'OUTIL DE CALCUL - RESULTATS.....	21
1. 9. 1. OUTIL ACTUEL.....	21
1. 9. 2. ACCELERATION DES CALCULS	21
1. 10. EXEMPLE DE RESULTATS - COALESCENCE DE FISSURES.....	22
1. 11. PASSAGE EN MILIEUX FINIS.....	28
1. 11. 1. CONDITIONS AUX LIMITES.....	28
1. 11. 2. CONSTRUCTION DES ELEMENTS DE FRONTIERE.....	28
1. 11. 3. ERREUR SUR LES CONDITIONS AUX LIMITES	30
1. 11. 4. VALIDATION DES RESULTATS EN MILIEUX FINIS	31
1. 12. PRISE EN COMPTE DE CAVITES CIRCULAIRES	34
1. 12. 1. SOLUTION ANALYTIQUE	34
1. 12. 2. FORMULATION GENERALE.....	34
1. 12. 3. COEFFICIENTS A DETERMINER.....	35
1. 12. 4. COEFFICIENTS D'INFLUENCE.....	36

1. 12. 5. PRECISION.....	36
1. 12. 6. COEFFICIENTS DE CONCENTRATION DE CONTRAINTE.....	36
1. 12. 7. VALIDATION DES RESULTATS POUR LES CAVITES CIRCULAIRES.....	37
1. 13. QUALITE DES SOLUTIONS OBTENUES	43
ANNEXES	45
A1. 1. COMPARAISON AVEC D'AUTRES METHODES	45
A1. 2. UTILISATION DE LA METHODE POUR DES CALCULS EN ELASTICITE LINEAIRE	48
2. PRISE EN COMPTE DU FROTTEMENT.....	50
2. 1. CONFIGURATIONS ENVISAGEES.....	50
2. 2. IMPLANTATION DU MODELE DE COULOMB - CAS DU CHARGEMENT RADIAL.....	51
2. 3. CALCUL DES EFFORTS DE FROTTEMENT.....	53
2. 4. POSSIBILITE DE RESOLUTION SANS CONVERGENCE	56
2. 5. HISTOIRE DU CHARGEMENT.....	56
2. 5. 1. EVOLUTION DES EFFORTS SUR LES FISSURES	56
2. 5. 2. TECHNIQUE DE CALCUL INCREMENTALE.....	57
3. CALCULS DES ENERGIES ELASTIQUES ET DISSIPÉES	59
3. 1. OBJECTIF	59
3. 2. CALCUL DES ENERGIES ELASTIQUES ET DISSIPÉES LIÉES A LA PRESENCE DES FISSURES - CONDITIONS AUX LIMITES EN CONTRAINTES.....	59
3. 3. CALCUL DES ENERGIES ELASTIQUES ET DISSIPÉES LIÉES A LA PRESENCE DES FISSURES - CONDITIONS AUX LIMITES EN DEPLACEMENT.....	63
3. 4. CALCUL DES ENERGIES EN PRESENCE DE CAVITES CIRCULAIRES POUR UN TENSEUR DES CONTRAINTES UNIFORME IMPOSE AUX FRONTIERES.....	64
3. 4. 1. RELATIONS LIÉES A L'UNIFORMITE DU CHAMP	64
3. 4. 2. UTILISATION DU PRINCIPE DE RECIPROCITE.....	65
3. 5. ENDOMMAGEMENT EN TRACTION SIMPLE POUR DES MILIEUX MULTIFISSURES - VALEURS DE L'ENDOMMAGEMENT d	67
4. CONSTRUCTION DES OPERATEURS F_{ij}, B_{ij} et P_{ij}.....	69
4.1. FISSURE SOUS PRESSIONS POLYNOMIALES.....	69
4. 1. 1. SOLUTION DE DEPART	69
4. 1. 2. SOLUTIONS POUR DES DISTRIBUTIONS MONOMIALES.....	70
4. 1. 3. MULTIFORMITE DES FONCTIONS COMPLEXES ET	

IMPLANTATION NUMERIQUE	70
4. 1. 4. CALCUL DES DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT	71
4. 1. 5. APPLICATIONS AUX CINQ PREMIERS POLYNOMES DE LEGENDRE	73
4. 1. 6. FACTEURS D'INTENSITE DES CONTRAINTES ASSOCIES AUX DISTRIBUTIONS POLYNOMIALES	74
4. 2. MILIEUX ELASTIQUES PLANS SEMI-INFINIS CHARGES PAR DES PRESSION MONOMIALES SUR UN SEGMENT.....	75
4. 2. 1. SOLUTION DE BOUSSINESQ.....	75
4. 2. 1. 1. CONTRAINTES	75
4. 2. 1. 2. DEPLACEMENTS.....	75
4. 2. 2. EXPRESSIONS OBTENUES.....	76
4. 3. CAVITES CIRCULAIRES ET PRESSIONS EN SERIE DE FOURIER	77
4. 3. 1. SOLUTION GENERALE.....	77
4. 3. 2. IDENTIFICATION DES COEFFICIENTS.....	81
4. 3. 2. 1. CHARGEMENT EN PRESSION CONSTANTE.....	81
4. 3. 2. 2. CHARGEMENT D'ORDRE 1.....	82
4. 3. 2. 3. CHARGEMENT D'ORDRE N	82
4. 3. 3. IMPLANTATION DANS LA BIBLIOTHEQUE DE FONCTIONS	82
ANNEXES	83
A4. 1. POLYNOMES DE LEGENDRE	83
A4. 2. EFFET DES PRESSIONS POLYNOMIALES SUR LES DEPLACEMENTS	83
A4. 2. 1. DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT	83
A4. 2. 2. DEPLACEMENT A LA FRONTIERE D'UN MILIEU SEMI-INFINI POUR DES PRESSIONS POLYNOMIALES.....	84
A4. 3. COUPLAGE AVEC UNE METHODE DE COLLOCATION.....	91
A4. 3. 1. METHODE DE COLLOCATION	91
A4. 3. 1. 1. PRINCIPE.....	91
A4. 3. 1. 2. DISCONTINUTE DE DEPLACEMENT D'ORDRE 0.....	91
A4. 3. 2. APPLICATION AU CAS D'UNE FISSURE SOUS PRESSION.....	93
A4. 3. 3. COUPLAGE AVEC LA METHODE PAR SUPERPOSITION	95
A4. 3. 3. 1. COMPATIBILITE.....	95
A4. 3. 3. 2. POSSIBILITES OFFERTES PAR UN TEL COUPLAGE.....	95

A4. 3. 3. 3. CONCLUSION	96
A4. 4. COUPLAGE AVEC LES METHODES D'EQUATIONS INTEGRALES AUX FRONTIERES	97
A4. 4. 1. INTERET	97
A4. 4. 2. PRINCIPE	97
A4. 4. 2. 1. METHODE D'EQUATIONS INTEGRALES AUX FRONTIERES	98
A4. 4. 2. 2. COUPLAGE AVEC LA METHODE DE SUPERPOSITION	98
A4. 4. 3. COMMENTAIRES	99
5. DETERMINATION DES SURFACES SEUIL DE PREMIERE PROPAGATION	100
5. 1. INTERET	100
5. 2. CONSTRUCTION D'UNE SURFACE SEUIL DE PREMIERE PROPAGATION	100
5. 2. 1. CRITERE DE RUPTURE	100
5. 2. 2. POSSIBILITE D'APPROXIMATION - CAS DE LA FISSURE SEULE EN MILIEU INFINI	101
5. 2. 2. 1. VALIDITE DE L'HYPOTHESE	101
5. 2. 2. 2. TAUX DE RESTITUTION D'ENERGIE	102
5. 2. 2. 3. AUTRE METHODE (ESHELBY)	104
5. 2. 2. 4. TAUX DE DISSIPATION	107
5. 3. CONSTRUCTION D'UNE SURFACE SEUIL DE PREMIERE PROPAGATION	109
5. 3. 1. VALIDITE DES APPROXIMATIONS	109
5. 3. 2. TECHNIQUE DE CONSTRUCTION EN CHARGEMENT RADIAL	109
5. 4. CAS D'UNE SEULE FISSURE OU UN SEUL PORE EN MILIEU INFINI	111
5. 4. 1. BUT DE L'ETUDE	111
5. 4. 2. FISSURE AVEC FROTTEMENT SEULE EN MILIEU INFINI	111
5. 4. 2. 1. PLAN (s, t)	111
5. 4. 2. 2. PLAN (s11, s22)	113
5. 5. EFFONDREMENT DES PORES	116
5. 6. IDENTIFICATIONS	118
5. 7. AMELIORATION DU MODELE	120
5. 7. 1. LACUNES ESSENTIELLES	120
5. 7. 2. POTENTIELS COMPLEXES POUR DES FISSURES "BRANCHEES"	120

5. 8. CAS DU TRAJET NON RADIAL.....	122
5. 9. POINTS DE BIFURCATION.....	122
ANNEXES.....	123
A5. 1. VISUALISATION DES EFFETS DU FROTTEMENT SUR L'ALLURE DES SURFACES SEUILS DE PREMIERE PROPAGATION.....	123
6. APPLICATION A L'ETUDE DE LA FISSURATION.....	126
6. 1. POSSIBILITES D'ETUDES.....	126
6. 2. REPONSE LOCALE DE MILIEUX MULTIFISSURES.....	127
6. 3. SURFACES SEUILS DE PREMIERE PROPAGATION.....	128
6. 4. PROPAGATION ET LOI DE FROTTEMENT.....	130
6. 4. 1. AVERTISSEMENTS.....	130
6. 4. 2. OBJECTIFS.....	130
6. 4. 3. GEOMETRIE INITIALE ET CHARGEMENT.....	132
6. 4. 4. FROTTEMENT CONSTANT.....	137
6. 4. 5. CAS PARTICULIER DU FROTTEMENT NUL.....	137
6. 4. 6. FROTTEMENT DEPENDANT DE LA LONGUEUR DE FISSURE.....	141
6. 4. 6. 1. GEOMETRIE FINALE.....	141
6. 4. 6. 2. CAS AVEC UNE FISSURE LONGUE.....	141
6. 4. 7. MILIEU CONTENANT DES FISSURES ET DES CAVITES CIRCULAIRES.....	148
6. 4. 7. 1. GEOMETRIE INITIALE.....	148
6. 4. 7. 2. GEOMETRIE APRES PROPAGATION.....	148
6. 5. FISSURES REPARTIES AU HASARD DANS UNE BANDE.....	155
6. 5. 1. CAS ENVISAGES.....	155
6. 5. 2. EFFET D'UNE FISSURE SUR SON VOISINAGE.....	156
6. 5. 3. BI-TRACTION.....	157
6. 5. 4. TRACTION SIMPLE.....	157
6. 5. 5. COMPRESSION A 45 DEGRES.....	157
6. 5. 5. 1. COEFFICIENT DE FROTTEMENT NUL.....	157
6. 5. 5. 2. COEFFICIENT DE FROTTEMENT VALANT 0,5.....	157
6. 6. SOUPLESSE DE MILIEUX MULTIFISSURES.....	171
6. 7. DISSIPATION POUR DES CHARGEMENTS CYCLIQUES.....	175
7. MESURES A L'ECHELLE MESOSCOPIQUE.....	177
7. 1. CHOIX D'UNE TECHNIQUE.....	177
7. 2. LA TECHNIQUE DE GRANULARITE LASER OU "SPECKLE LASER".....	177

7. 2. 1. PRINCIPE GENERAL.....	177
7. 2. 2. OBTENTION DES CLICHES - REGLAGES OPTIQUES.....	178
7. 2. 3. DEPOUILLEMENT AUTOMATIQUE DES FRANGES D'INTERFERENCES.....	179
7. 3. ESSAIS SUR MORTIER NORMAL ET PATE DE CIMENT NORMALE.....	183
7. 3. 1. OBJECTIFS.....	183
7. 3. 2. EPROUVETTES ET CONDITIONS D'ESSAI.....	183
7. 3. 3. RESULTATS D'ESSAIS.....	184
7. 4. CONCLUSIONS.....	188
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES.....	190
L'OUTIL DE CALCUL.....	190
LES INTERACTIONS.....	192
LOGICIELS UTILISES.....	193
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	194

LES MOTIVATIONS

Lorsqu'on construit un modèle de comportement, on se base souvent sur des constatations expérimentales et sur des intuitions. Pour cela, il est indispensable de connaître les phénomènes qui régissent le comportement aux petites échelles. Ces échelles sont l'échelle microscopique pour les phénomènes liés par exemple aux molécules, cristaux ou dislocations et l'échelle mésoscopique pour les phénomènes liés aux comportements de structures des grains élémentaires. L'intuition s'avère parfois insuffisante et peut être mise en défaut particulièrement lorsqu'on s'intéresse à l'échelle intermédiaire mésoscopique (voir par exemple chapitre 1.10). Cette échelle est la plus petite échelle à laquelle on peut considérer la matière homogène et continue.

Afin de faciliter l'appréhension des éléments qui gouvernent la fissuration et de compléter les expérimentations, il s'avère utile de construire des modèles numériques. Il est en effet plus aisé de simuler des sollicitations multiaxiales que de les réaliser expérimentalement.

Cette étude touche à l'aspect mésoscopique de la fissuration et à sa modélisation numérique dans l'optique de dégager des paramètres fondamentaux qui provoquent la diffusion ou la localisation des "zones endommagées". Il est présenté ici un outil de calcul convenant aux milieux bi-dimensionnels multifissurés et poreux.

La plupart des études mésomécaniques ignorent les interactions entre les fissures ou cavités qui schématisent la dégradation du matériau [ANDRIEUX 83]. Lorsque la densité de défauts est faible cette hypothèse est réaliste (la plupart des modèles probabilistes se base sur cette hypothèse). Dans le cas contraire, il est impossible de les ignorer et il est également difficile de connaître à priori leurs effets. Les redistributions d'énergie dues à la propagation d'une fissure et à l'effet d'interactions peuvent conduire à une augmentation de l'endommagement macroscopique sans qu'il y ait pour autant évolution de la densité de fissures [BERTHAUD 90] [PIJAUDIER-CABOT 90].

De plus les exigences vis à vis des modèles de comportement macroscopiques sont de plus en plus fortes : comportements "post-pic", effets unilatéraux [LA BORDERIE 91] [RAMTANI 90] [MAZARS 76, 84, 90], sollicitations multiaxiales, dynamiques [FLEJOU 92]. Il n'existe pas de modèle universel. Même si l'on connaît les phénomènes microscopiques et que l'on sait identifier le comportement macroscopique, il n'est pas toujours possible de découpler totalement les phénomènes.

Nous avons donc décidé de décrire le plus finement possible les interactions en milieu élastique contenant des fissures ou des pores dans le souci de participer à la réalisation de modèles macroscopiques en accord avec les mécanismes de ruine. Ces mécanismes mésoscopiques doivent prendre en compte les phénomènes microscopiques et les lois d'interface. Une tentative de modélisation du frottement dans les fissures est présentée plus loin.

Les interactions conduisent à une déformation supplémentaire des fissures ou des pores. Il est donc possible de choisir une méthode de déplacement pour décrire la discontinuité d'ouverture des fissures ou la forme des cavités [BOUHADDANE 87] [BELKACEMI 90] [YIN 92].

Cette description nécessite un développement des fonctions de description des déplacements à des ordres élevés compte tenu des distorsions des surfaces initiales. Une méthode d'influence qui prend en compte l'effet des interactions par une distribution de forces fictives est d'une plus grande efficacité [KACHANOV 85, 87] [BENVENISTE 88].

C'est cette technique que nous avons généralisée au cas des milieux finis contenant des fissures et des pores avec loi de contact unilatéral et frottement. Les capacités de cette technique de superposition sont évaluées puis des couplages avec d'autres techniques sont envisagés.

Les solutions analytiques nécessaires pour traiter les contours extérieurs et intérieurs utilisent à la fois des représentations par des potentiels de couche simple (frontières et cavités circulaires) et des représentations par des potentiels de couche double (fissures). Par nature, la représentation par des potentiels de couche double permet d'aborder numériquement le cas des milieux contenant des singularités (fond de fissure) car la description des champs élastiques reste fidèle.

Les méthodes de mesures optiques par interférences possèdent une résolution qui permet de mesurer des déplacements de l'ordre du micromètre. L'identification expérimentale est indispensable pour construire et valider les modèles numériques mésoscopiques. L'utilisation d'une technique de granularité laser [FOND 89] complétera l'étude des possibilités d'une approche du comportement des matériaux à cette échelle.

Ce document s'articule en trois parties. Les chapitres 1. à 7. traitent de la technique de calcul : hypothèses, capacités et validations. Une technique de prise en compte de l'aspect unilatéral lié à la fermeture de fissures est proposée. Le contact entre les lèvres de fissures fermées y est modélisé par un frottement de Coulomb. Des possibilités de couplages sont envisagées pour combler les lacunes inhérentes à la méthode.

Le chapitre 8. propose une étude de l'influence des paramètres du modèle numérique sur la fissuration et ses effets. La compression de milieux multifissurés génère des forces de contact dans les fissures. Ces forces de contact peuvent avoir un effet sur le comportement global de ces milieux aussi bien que sur le développement de la fissuration. Ces effets sont quantifiés travers de quelques exemples.

Le chapitre 9. relate des possibilités d'identifications et de validations expérimentales à l'aide d'une méthode de mesures optiques. Les méthodes de mesures optiques offrent une résolution de l'ordre du micromètre. Un essai réalisé sur mortier illustre les limites et la souplesse de ce type de méthode.

**LA METHODE PAR
SUPERPOSITION**

1. LA METHODE PAR SUPERPOSITION

1. 1. INTRODUCTION

Dans le cadre de l'étude de la localisation dans les matériaux élastiques fragiles, on ne peut pas négliger la présence de défauts et il est indispensable de connaître les interactions entre défauts. Il est cependant difficile de quantifier les paramètres de la propagation notamment quand les défauts sont nombreux.

Pour une étude en milieu infini bi-dimensionnel, nous avons choisi d'utiliser une méthode due à M. KACHANOV (1987), enrichie par les travaux de Y. BENVENISTE et al. (1988) qui permet de calculer les facteurs d'intensité des contraintes de chaque fissure, en prenant en compte leur interaction.

Ce chapitre reprend la technique et les fonctions données par Y. BENVENISTE et al (1988) et les complète par le calcul des ouvertures de fissures.

1. 2. DOMAINE D'APPLICATION ET PRINCIPE

La méthode que nous allons exposer plus loin s'applique aux milieux continus bi-dimensionnels infinis, élastiques linéaires contenant des fissures rectilignes et non sécantes. Il est possible de prendre en compte les conditions de contact des lèvres de fissures.

La méthode consiste à approcher l'état de contrainte d'un milieu multifissuré soumis à un chargement donné par superposition de solutions en milieux infinis comportant une seule fissure rectiligne (dont la solution analytique est connue) soumise à une pression interne fictive à déterminer, afin de retrouver les conditions aux limites du milieu multifissuré.

L'effet des interactions apparaît de la manière suivante : lorsque les lèvres d'une fissure sont soumises à une répartition de contraintes donnée, on peut évaluer l'effet de ce chargement sur le segment de droite imaginaire qu'occupe une autre fissure. En vertu du principe de superposition, il faut appliquer sur les lèvres de cette dernière des contraintes opposées pour obtenir une surface libre de contrainte afin de satisfaire aux conditions aux limites. Les effets de ces contraintes supplémentaires sont bien sûr également pris en compte par le calcul des interactions.

Les répartitions de contraintes sont décrites à l'aide des polynômes de Legendre. En utilisant ensuite la propriété d'orthogonalité des polynômes de Legendre puis en exprimant les conditions aux limites en contrainte sur les lèvres des fissures, on construit un système linéaire.

1. 3. EXEMPLE

Cherchons par exemple à résoudre ce problème : deux fissures alignées en milieu infini sous tension. Le principe de superposition permet de décomposer comme suit : P_1 et P_2 sont des répartitions d'effort.

La solution du problème 1 est connue mais pas celle du problème 2. Nous ramenons le problème 2 à des solutions connues : en utilisant à nouveau le principe de superposition on obtient les problèmes 3 et 4 où d_{ij} représente la contrainte sur la fissure i provoquée par l'ouverture de la fissure j .

Les inconnues sont désormais les \vec{d}_{ij} le long des fissures 1 et 2. Les solutions des problèmes 3 et 4 sont celles fournies par une fissure seule en milieu infini. Les équations traduisant la superposition s'expriment par :

$$\begin{cases} \vec{P}_1 = \vec{d}_{11} + \vec{d}_{12} \text{ le long de la fissure 1} \\ \vec{P}_2 = \vec{d}_{22} + \vec{d}_{21} \text{ le long de la fissure 2} \end{cases}$$

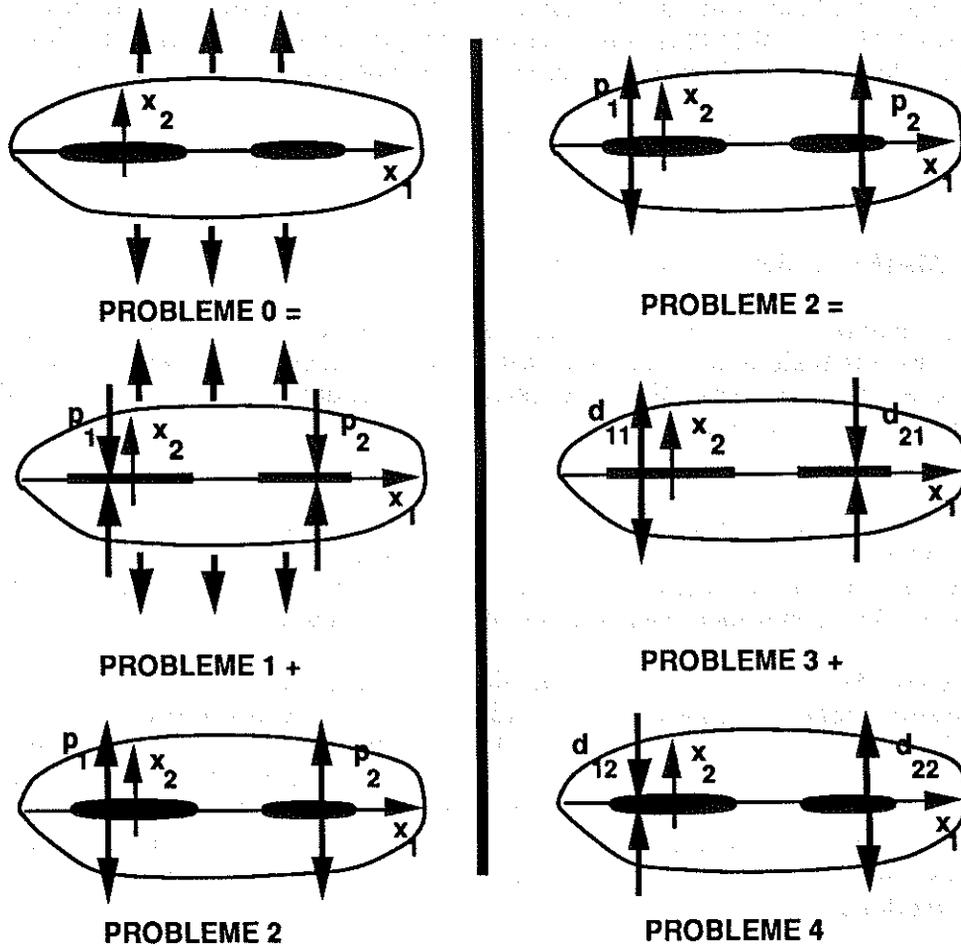


Figure 1. 1 : décomposition d'un problème par superposition.

Supposons désormais les fissures 1 et 2 suffisamment éloignées pour que l'on puisse approximer les d_{ij} par leur valeur moyenne sur les fissures. On peut alors écrire ces relations entre les d_{ij} :

$$\begin{pmatrix} d_{21}^1 \\ d_{21}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & b_{21} \\ c_{21} & e_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11}^1 \\ d_{11}^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} d_{12}^1 \\ d_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & b_{12} \\ c_{12} & e_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{22}^1 \\ d_{22}^2 \end{pmatrix}$$

où l'indice supérieur est 1 pour la contrainte normale et 2 pour la contrainte tangentielle. On en déduit le système qui fournira une solution approchée du problème 2 :

$$\begin{cases} d_{11}^1 + a_{12} d_{22}^1 + b_{12} d_{22}^2 = p_1^1 \\ d_{11}^2 + c_{12} d_{22}^1 + e_{12} d_{22}^2 = p_1^2 \\ d_{22}^1 + a_{21} d_{11}^1 + b_{21} d_{11}^2 = p_2^1 \\ d_{22}^2 + c_{21} d_{11}^1 + e_{21} d_{11}^2 = p_2^2 \end{cases}$$

Pour notre cas particulier on exprime les conditions aux limites :

$$p_1^1 = p_2^1 = 1 \text{ et } p_1^2 = p_2^2 = 0.$$

D'autre part, du fait de la géométrie particulière de l'exemple, on a $b_{21} = c_{21} = b_{12} = c_{12} = 0$ (les pressions normales n'ont pas d'influence sur les contraintes tangentielles et inversement lorsque les fissures sont sur le même axe). On obtient donc :

$$d_{11}^1 = \frac{p_1^1 - a_{12} p_2^1}{(1 - a_{12} a_{21})} \quad \text{et} \quad d_{22}^1 = \frac{p_2^1 - a_{21} p_1^1}{(1 - a_{12} a_{21})}$$

$$d_{11}^2 = \frac{p_1^2 - c_{12} p_2^2}{(1 - c_{12} c_{21})} = 0 \quad \text{et} \quad d_{22}^2 = \frac{p_2^2 - c_{21} p_1^2}{(1 - c_{12} c_{21})} = 0$$

$$\text{avec } \sigma_{22}(x_1) = P_0 \left[\sqrt{\frac{x_1^2}{x_1^2 - a_1^2}} - 1 \right] \quad \text{donc} \quad a_{21} = \frac{1}{f_2 - d_2} \int_{d_2}^{f_2} \sigma_{22}(x_1) dx_1$$

(1. 3. 1)

Utilisons l'expression (1. 3. 1) où d_2 et f_2 représentent le début et la fin de la fissure 2 :

$$a_{21} = \frac{1}{f_2 - d_2} \left[\sqrt{x_1^2 - a_1^2} - x_1 \right]_{d_2}^{f_2} = \frac{\sqrt{f_2^2 - a_1^2} - \sqrt{d_2^2 - a_1^2}}{f_2 - d_2} - 1$$

1. 4. APPLICATION NUMERIQUE

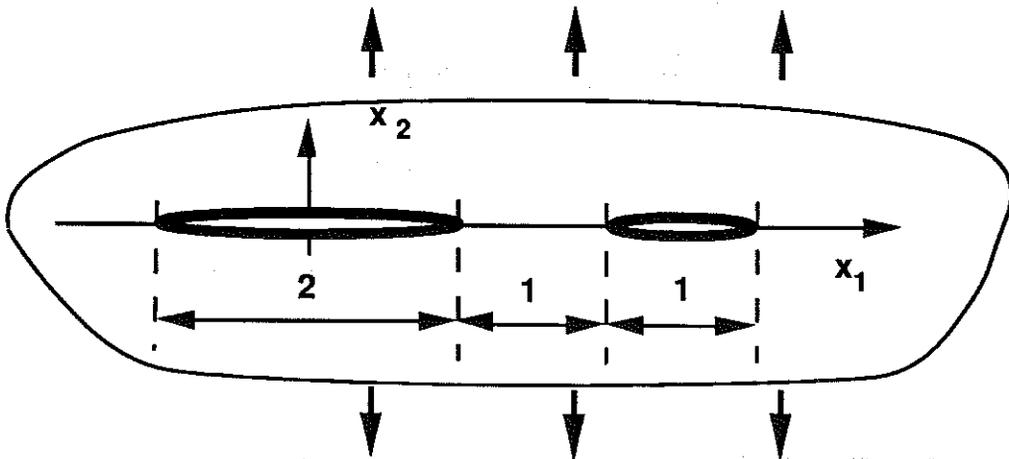


Figure 1. 2 : application numérique.

On obtient pour cette géométrie :

$$\begin{cases} a_{21} = \sqrt{8} - \sqrt{3} - 1 = 0,09638 \\ a_{12} = \frac{\sqrt{48} - \sqrt{8}}{4} - 1 = -0,0249 \end{cases}$$

Pour une pression constante on a $K_I = p\sqrt{\pi a}$ donc $K_{IA} = K_{IB}$ et $K_{IC} = K_{ID}$. On obtient donc ce qu'on nommera une approximation "à l'ordre 0" :

$$\begin{cases} K_{IA} = K_{IB} = 1,821 \\ K_{IC} = K_{ID} = 1,377 \end{cases}$$

En se rapportant au chapitre 1. 7. , on peut comparer ces valeurs à la solution fournie en référence :

$$\begin{cases} K_{IA} = 1,804 \text{ et } K_{IB} = 1,848 \\ K_{IC} = 1,411 \text{ et } K_{ID} = 1,352 \end{cases}$$

L'approximation est pour ce cas relativement satisfaisante mais pour des interactions plus fortes de l'approximation des valeurs \vec{d}_{ij} à leur valeur moyenne ne suffira plus et l'on pressent que la solution sera meilleure dès lors que l'on saura mieux décrire les répartitions \vec{d}_{ij} le long des fissures.

1. 5. FORMULATION GENERALE

1. 5. 1. DEFINITIONS

Soit \vec{D}_j le vecteur qui représente la répartition d'efforts normaux et tangentiels sur les lèvres de la fissure j et soit $\vec{D}_j(x_j)$ sa valeur au point x_j .

Soit $\vec{\sigma}_i$ le vecteur qui représente la répartition de contraintes normales et tangentielles dans la région occupée par la fissure i et soit $\vec{\sigma}_i(x_i)$ sa valeur au point x_i .

Soit \vec{S}_i le vecteur qui représente la répartition de contraintes normales et tangentielles dues au chargement extérieur dans la région occupée par la fissure i et soit $\vec{S}_i(x_i)$ sa valeur au point x_i .

\vec{D}_j , $\vec{\sigma}_i$ et \vec{S}_i sont des vecteurs dont les composantes sont des fonctions continues.

Soit \mathcal{F}_{ij} l'opérateur linéaire non symétrique permettant de passer de \vec{D}_j à $\vec{\sigma}_i$, tel que :

$$\mathcal{F}_{ij}(\vec{D}_j(x_j)) = -\vec{\sigma}_i(x_i) \quad (1. 5. 1)$$

$$\text{remarquons que } \mathcal{F}_{jj}(\vec{D}_j(x_j)) = \vec{D}_j(x_j) \text{ c'est à dire } \mathcal{F}_{jj} = \text{Id} \quad (1. 5. 2)$$

1. 5. 2. PRINCIPE DE SUPERPOSITION

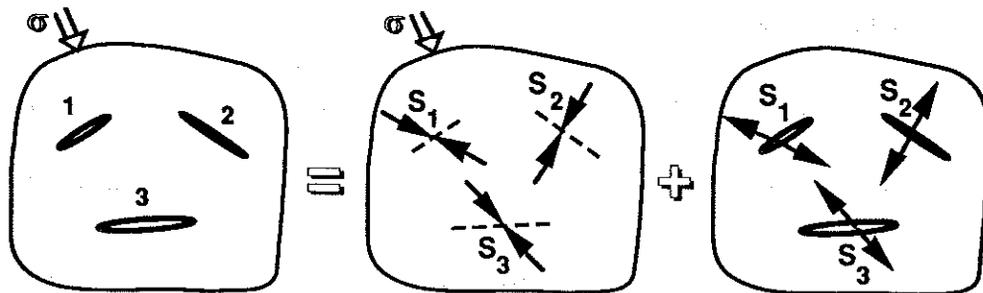


Figure 1. 3 : conditions aux limites après superposition.

Le principe de superposition permet d'écrire pour la fissure i que le chargement inconnu $\vec{D}_j(x_j)$ correspond à la somme du chargement extérieur et des effets de toutes les fissures j chargées par les $\vec{D}_j(x_j)$.

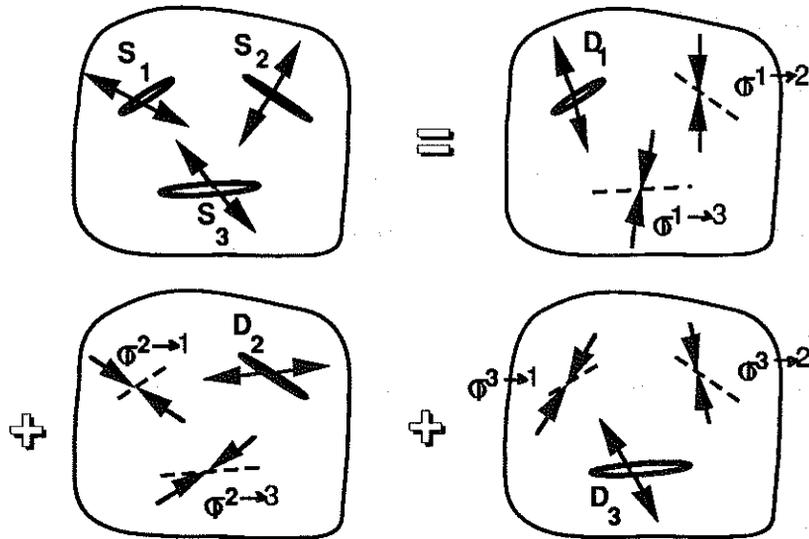


Figure 1. 4 : superposition des contraintes.

$$\vec{D}_i(x_i) = \vec{S}_i(x_i) - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_f} \mathcal{F}_{ij}(\vec{D}_j(x_j))$$

compte tenu de $\mathcal{F}_{ii} = \text{Id}$, l'expression précédente peut se mettre sous la forme :

$$\vec{S}_i(x_i) = \sum_{j=1}^{N_f} \mathcal{F}_{ij}(\vec{D}_j(x_j)) \quad (1. 5. 3)$$

où N_f est le nombre de fissures et les $\vec{D}_j(x_j)$ sont les inconnues du problème.

1. 5. 3. DISCRETISATION

Dans l'équation (1. 5. 3) les répartitions $\vec{D}_j(x_j)$ sont inconnues. Pour résoudre le problème, on projette les répartitions de contraintes sur une base de fonctions orthogonales. Dans notre cas nous utilisons les polynômes de Legendre (annexe A4. 1.).

On remplace ainsi la répartition par un développement particulier en polynômes. Ceci revient à décrire la répartition par ses différents moments.

Soit $L(n,x)$ la valeur en x du polynôme de Legendre d'ordre n .

Les polynômes de Legendre d'ordre n et q ont la propriété d'orthogonalité pour le produit scalaire défini par :

$$(L_n(x), L_q(x)) = \int_{-1}^{+1} L_n(x)L_q(x)dx \quad (1. 5. 4)$$

$$\text{On a : } (L_n, L_q) = \frac{2\delta_{nq}}{2n+1} \quad (1.5.5)$$

avec δ symbole de Kronecker et on notera $(L_n, L_n) = \|L_n\|^2$

Soit $d(i,m,n)$ le coefficient de la répartition de contrainte normale ou tangentielle (avec $m=1$ ou 2) suivant le polynôme de Legendre d'ordre n sur les lèvres de la fissure i .

On peut projeter les répartitions sur la base fournie par ces polynômes :

$$d(i,m,n) = \int_{-1}^{+1} L_n(x) [\vec{D}_i(a_i x) \cdot \vec{v}_m] dx \quad (1.5.6)$$

$$s(i,m,n) = \int_{-1}^{+1} L_n(x) [\vec{S}_i(a_i x) \cdot \vec{v}_m] dx \quad (1.5.7)$$

où \vec{v}_m est la normale ($m=1$) ou la tangente ($m=2$) à la fissure et a_i est la demi-longueur de la fissure i .

Ainsi, l'opérateur \mathcal{F}_{ij} devient la matrice \mathbb{F}_{ij} des coefficients d'influence

$\alpha(i,m,n,j,k,\ell)$: un coefficient d'influence $\alpha(i,m,n,j,k,\ell)$ traduit l'influence de la fissure j sur la fissure i ; k et ℓ désignent les vecteurs qui portent les contraintes appliquées sur les lèvres ; m et n correspondent aux éléments de la base choisie pour décrire les fonctions (pour un plan).

$$\mathbb{F}_{ij} = [\alpha(i,m,n,j,k,\ell)] \quad (1.5.8)$$

La solution du problème sera donnée par:

$$[\mathbb{F}_{ij}] \vec{D} = \vec{S} \quad (1.5.9)$$

où \vec{D} est le vecteur des répartitions cherchées et \vec{S} celui des conditions aux limites.

Remarque sur les extensions possibles : cette méthode d'influence conviendrait aussi pour des répartitions de déplacements. Dès que l'on peut exprimer analytiquement les influences entre répartition de contraintes et répartition de déplacements, alors il est possible d'imposer des conditions aux limites mixtes.

1. 6. DESCRIPTION DETAILLEE DE LA METHODE

1. 6. 1. COEFFICIENTS D'INFLUENCE

Considérons N_f fissures rectilignes distinctes en tout point dans un milieu bi-dimensionnel infini, homogène, élastique linéaire soumis à un état de contrainte connu.

Dans une première phase, on calcule les coefficients d'influence de chaque fissure sur les autres. Pour cela on utilise les répartitions de contraintes normales et tangentielles aux lèvres de la fissure suivant les polynômes de Legendre (voir annexe A4. 1.).

Les potentiels complexes pour ces types de chargements sont connus [MUSKHELISHVILI 53] [ERDOGAN 62].

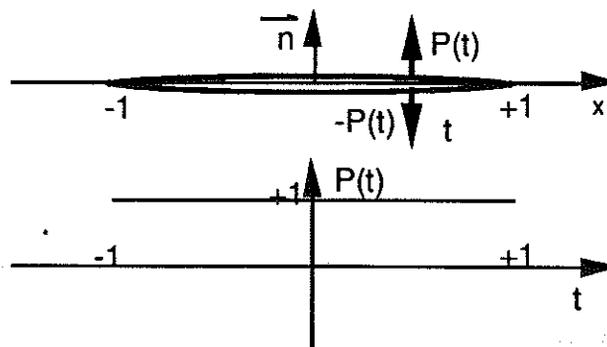


Figure 1. 5 : effort normal distribué suivant le polynôme de Legendre d'ordre 0.

Notons :

a la demi longueur de fissure,

$L(n,x)$ la valeur en x du polynôme de Legendre d'ordre n ,

$d(i,m,n)$ le coefficient de la répartition de contrainte normale ou tangentielle (respectivement $m=1$ ou 2) suivant le polynôme de Legendre d'ordre n sur les lèvres de la fissure i ,

$s(j,k,\ell)$ l'effet de la contrainte appliquée à l'infini sur la répartition suivant le polynôme de Legendre d'ordre ℓ , de la contrainte normale ou tangentielle (respectivement $k=1$ ou 2) sur la ligne imaginaire qu'occupe la fissure j ,

$\alpha(i,m,n,j,k,\ell)$ le coefficient de la répartition de contrainte définie par (i,m,n) sur la ligne imaginaire qu'occupe la fissure i lorsqu'on applique $d(j,k,\ell) = 1$ sur les lèvres de la fissure j .

En d'autres termes :

$$\alpha(i,m,n,j,k,\ell) = \frac{1}{\|L_n\|^2} \int_{-1}^{+1} \sigma(ax) L(n,x) dx \quad (1. 6. 1)$$

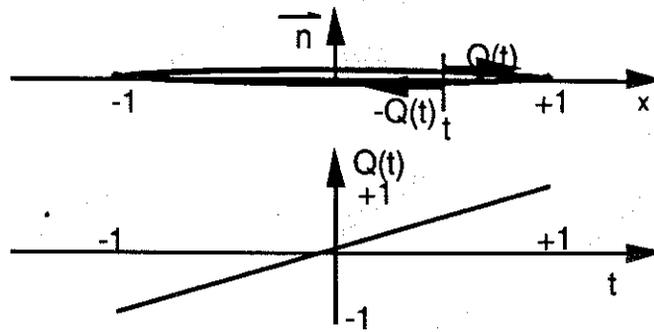


Figure 1. 6 :effort tangentiel distribué suivant le polynôme de Legendre d'ordre 1.

Par exemple, on charge la fissure j par une contrainte normale à ses lèvres distribuée suivant le polynôme de Legendre d'ordre 1. Ceci provoque un état de contrainte non nul sur la ligne imaginaire qu'occupe la fissure i .

Ceci nous permet de calculer $\alpha(i,m,n,j,l)$. Lorsque tous les coefficients $\alpha(i,m,n,j,k,\ell)$ sont évalués, on peut écrire, pour satisfaire aux conditions de bords libres de contraintes sur les lèvres des fissures, pour $m=1$ (contrainte normale) ou $m=2$ (contrainte tangentielle) :

$$\sum_{n=0}^p L(n,x) * \left[s(i,m,n) - d(i,m,n) + \sum_{j=1}^{N_f} \sum_{\ell=0}^p \sum_{k=1}^2 d(j,k,\ell) * \alpha(i,m,n,j,k,\ell) \right] = 0 \quad (1.6.2)$$

Dans (1.6.2) la somme de $j=1$ à N_f est effectuée pour i différent de j et l'on utilise les $(p+1)$ premiers polynômes de Legendre. Les inconnues sont les $d(i,m,n)$.

On projette chaque équation sur le polynôme de Legendre d'ordre q :

$$\int_{-1}^{+1} L(q,x) \left\{ \sum_{n=0}^p L(n,x) * \left[s(i,m,n) - d(i,m,n) + \sum_{j=1}^{N_f} \sum_{\ell=0}^p \sum_{k=1}^2 d(j,k,\ell) * \alpha(i,m,n,j,k,\ell) \right] \right\} dx$$

$$= \|L_q\| * \left\{ s(i,m,q) - d(i,m,q) + \sum_{j=1}^{N_f} \sum_{\ell=0}^p \sum_{k=1}^2 d(j,k,\ell) * \alpha(i,m,q,j,k,\ell) \right\} = 0 \quad (1.6.3)$$

On peut de cette façon faire apparaître $2*(p+1)$ équations pour la fissure i soit au total $2*(p+1)*N_f$ équations pour obtenir les $2*(p+1)*N_f$ inconnues $d(i,m,n)$ du problème. Ces inconnues correspondent aux coefficients du développement des efforts fictifs.

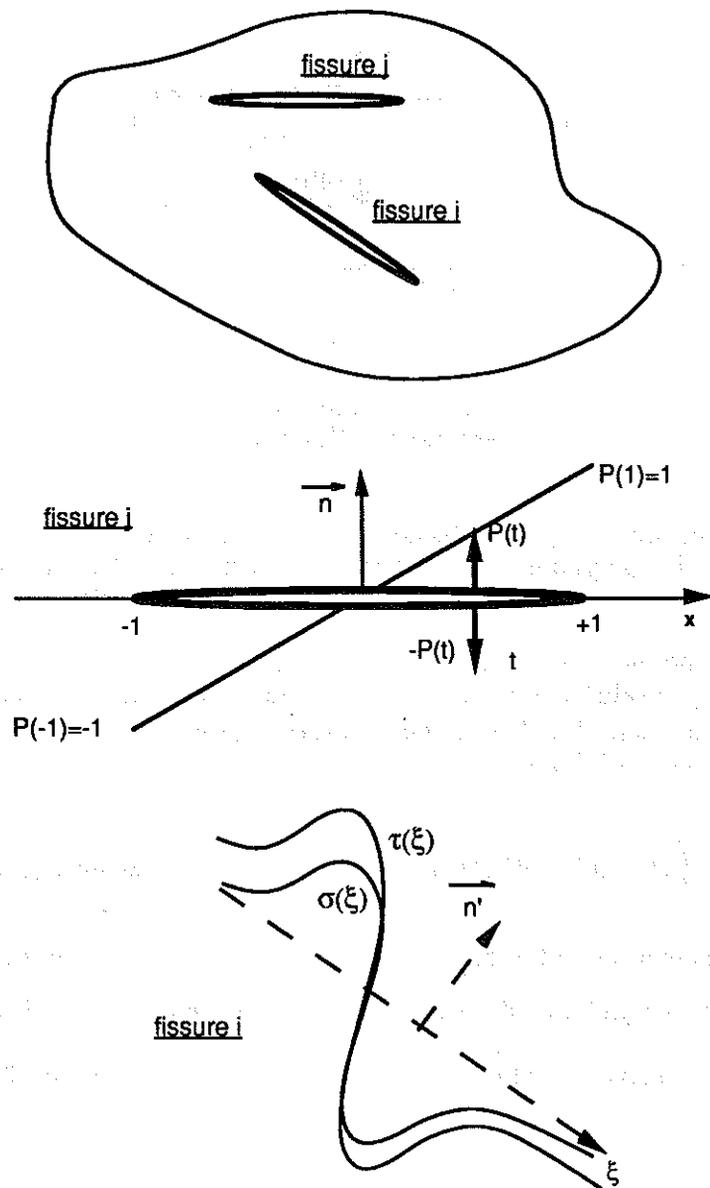


Figure 1. 7 : effet de la fissure j chargée à l'ordre 1 avec un effort normal sur les contraintes normales et tangentielles sur la ligne imaginaire qu'occupe la fissure i.

Remarques :

Les paramètres E et ν n'interviennent pas dans les potentiels complexes ; le résultat vaut donc aussi bien pour les contraintes planes que pour les déformations planes. Seuls les calculs de déformations et déplacements font intervenir les constantes élastiques du matériau.

Le caractère multiforme de certaines fonctions complexes (racine par exemple) nécessite de prendre des précautions lors de la programmation du calcul de $\sigma(ax)$.

1. 6. 2. CALCUL DES FACTEURS D'INTENSITE DES CONTRAINTES

A partir des relations fournies par la mécanique des milieux continus (fonctions de Green), on peut calculer les coefficients d'intensité des contraintes aux pointes de chaque fissure. On obtient aussi bien le facteur K_I en mode I que le facteur K_{II} en mode II. Si l'on choisit les indices d pour le début de la fissure et f pour la fin, on a :

$$K_{Id} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{+a} \sigma(x) \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx \quad \text{et} \quad K_{If} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{+a} \sigma(x) \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx \quad (1. 6. 4)$$

$$K_{II d} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{+a} \tau(x) \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx \quad \text{et} \quad K_{II f} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{+a} \tau(x) \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx \quad (1. 6. 5)$$

σ et τ représentent les contraintes normales et tangentielles sur la fissure considérée.

2 solutions sont envisageables :

a) *solution rapide mais peu précise* : on a décrit les pressions dans les fissures par leur projection sur les p premiers polynômes de Legendre :

$$\sigma(x_i) = \sum_{n=0}^{n=p} L(n,x) d(i,1,n) \quad (1. 6. 6)$$

Il suffit donc de connaître le facteur d'intensité des contraintes K_{dn} (donné plus loin) lié à chaque terme $L(n,x)$ de cette somme pour obtenir le facteur d'intensité des contraintes total.

$$K_{dn} = \frac{1}{\pi a} \int_{-a}^{+a} L(n,x) \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx \quad (1. 6. 7)$$

d'où :

$$K_{Id} = \sum_{n=0}^p K_{dn} * d(i,1,n) \sqrt{\pi a} \quad (1. 6. 8)$$

et :

$$K_{II d} = \sum_{n=0}^p K_{dn} * d(i,2,n) \sqrt{\pi a} \quad (1. 6. 9)$$

Cette solution est rapide puisqu'il suffit d'effectuer une somme pour évaluer les facteurs d'intensité des contraintes, mais peu précise car les distributions \vec{D} qui représentent les effets des interactions approximent les contraintes induites sur les fissures.

b) la solution que nous avons adoptée pour sa précision remarquable mais qui nécessite autant de temps pour calculer les facteurs d'intensité des contraintes que pour construire la matrice d'interactions. Même si l'ordre choisit pour décrire les répartitions de contraintes est faible, les contraintes qui en résultent en un point peuvent être connues avec précision si l'on réutilise les solutions analytiques ayant servi à l'évaluation des coefficients d'interaction.

$$K_{If} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{+a} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} * [\text{somme des effets dus aux } d(j,k,\ell) \text{ et } s(j,k,\ell) \text{ en } x] dx \quad (1. 6. 10)$$

pour la fissure i et les effets en contraintes normales. On reconstruit implicitement l'effet des interactions ce qui explique la précision finale.

Pratiquement, on intègre une fonction constante par morceaux puisqu'on calcule les $\sigma(x)$ et $\tau(x)$ aux centres d'éléments de fissure de longueur $2\Delta l$, dont le nombre r est choisi par l'utilisateur.

$$K_{If} = \sum_{h=1}^r \sigma(x_h) * \left\{ \arcsin(x_h + \Delta l) - \sqrt{1 - (x_h + \Delta l)^2} - \left[\arcsin(x_h - \Delta l) + \sqrt{1 - (x_h - \Delta l)^2} \right] \right\} \quad (1. 6. 11)$$

Comparaison des deux solutions sur un exemple :

Avec la géométrie de la figure 1. 8 où $a = 1$ et $d = 0,222$ les deux types de calculs proposés ici ont été menés en utilisant 100 points pour effectuer les intégrations numériques. Les valeurs des facteurs d'intensité des contraintes pour les polynômes de Legendre sont données en (4. 1. 21). Elles sont affectées du poids correspondant au $d(i,m,n)$ de l'ordre du polynôme considéré. On obtient les résultats suivants à comparer aux valeurs exactes $K_{IA} = 1,98056$ et $K_{IB} = 2,57692$:

ordre	K_{IA} méth a)	K_{IB} méth a)	erreur en %	K_{IA} méth b)	K_{IB} méth b)	erreur en %
0	2,16200	2,16200	16,9	1,97767	2,54113	1,4
1	1,92573	2,43632	5,4	1,98547	2,58696	0,39
2	2,00860	2,51394	1,4	1,98147	2,57781	0,05
3	1,9701	2,54946	1,1	1,98089	2,57540	0,06
4	1,98496	2,56335	0,53	1,98023	2,57374	0,12

La méthode b) offre visiblement une précision telle qu'il ne soit pas nécessaire de développer les répartitions à des ordres élevés pour obtenir des résultats de même qualité qu'avec la méthode a). Pour b), les champs de contraintes reconstruits varient effectivement en $1/\sqrt{r}$ (7. 2. 9) alors que pour a) ces variations sont décrites au mieux à l'aide de polynômes de degrés supérieur ou égal à 0.

1. 7. MILIEUX INFINIS

1. 7. 1. ANALYSE CRITIQUE

Cette technique est utilisable en trois dimensions sous réserve de connaître les solutions analytiques des répartitions $L(n,x,y,z)$ choisies pour les formes de frontières choisies [KACHANOV 88]. Dans la pratique, le nombre limité des connaissances quant aux résultats analytiques pour de tels domaines soumis à de tels types de chargements ne permet pas d'envisager de développements poussés.

Il faut signaler que la refermeture des fissures n'est pas prise en compte dans le calcul : on peut évaluer des dépressions fictives à l'intérieur des fissures (interpénétration des lèvres). Dans ce cas, le calcul peut être faux puisque la fissure peut alors être partiellement ou totalement refermée. Il convient donc de vérifier que chaque fissure est ouverte pour le chargement et la géométrie imposés. Lorsque ce n'est pas le cas il faut prendre en compte le contact des deux lèvres des fissures fermées. De plus, la restriction aux milieux infinis limite l'utilisation de cette méthode (calculs des énergies...). Ces deux lacunes justifient les développements présentés plus loin.

D'autre part la précision de la méthode n'est pas quantifiable. L'expérience montre tout de même que lorsque la distance séparant deux extrémités de fissure n'est pas inférieure à la demi-longueur de la plus grande, l'erreur par rapport à la solution exacte (lorsqu'elle est connue) est de l'ordre de 1% (tableaux suivants). Le problème de la proximité ainsi soulevé fait apparaître la difficulté à décrire des champs de contraintes au voisinage d'une singularité par une série polynomiale. Des études de fissures proches nécessiteraient l'utilisation d'autres fonctions, la seule condition pour ces fonctions étant la propriété d'orthogonalité.

Notre objectif ne nous place pas, à priori, dans ce type de situation puisque notre souci est de mieux comprendre les mécanismes qui régissent "le mode diffus" de l'endommagement des matériaux à matrice fragile. Il consiste à dégager des tendances et à connaître l'influence de paramètres (géométrie, frottement...) pour des "grands" nombres de fissures en interaction sans privilégier l'interaction de quelques unes d'entre elles. Le passage du "mode diffus" au "mode localisé" nécessite en conséquence des conditions particulières de calcul.

La méthode originale se limite aux milieux infinis et ne peut prendre en compte ni le frottement ni la présence de pores ou d'inclusions. La limite essentielle est la rectitude des fissures empêchant l'étude de l'évolution de milieux multifissurés (on peut se reporter au chapitre : " Couplage avec des méthodes de collocation " qui propose un moyen d'y parvenir).

Comme le chargement imposé est quelconque, il est possible d'obtenir des résultats en flexion ou sous des champs d'auto-contraintes.

Cette technique se distingue donc par sa simplicité, sa rapidité d'entrée des données et par la bonne qualité des résultats obtenus là où d'autres sont délicates à utiliser et nécessitent souvent des moyens de calculs puissants.

1. 7. 2. VALIDATION DES RESULTATS EN MILIEUX INFINIS

Les sollicitations sont des états de traction avec une contrainte unité. Les calculs ont utilisé les trois premiers polynômes de Legendre et 30 points pour les intégrations numériques. Les résultats "connus" font référence à l'ouvrage :

Y. Murakami , (1988), " Stress intensity factors handbook ", Pergamon Press.

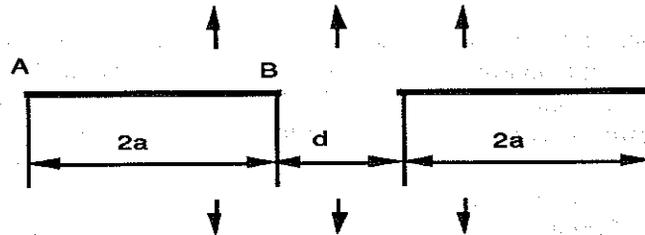


Figure 1. 8 : deux fissures identiques alignées.

géométrie		résultats connus(exacts)		résultats par superposition	
a	d	K_{IA}	K_{IB}	K_{IA}	K_{IB}
1	18	1,773	1,77302	1,774	1,775
1	2	1,822	1,85746	1,824	1,860
1	0,222	1,98056	2,57692	1,981	2,5754
1	0	2,50662	2,50662	4,231	4,231

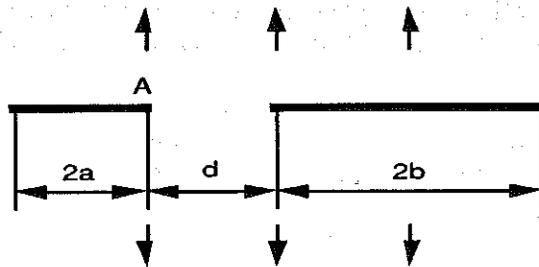


Figure 1. 9 : deux fissures alignées.

géométrie			résultats connus(erreur non quantifiée)	résultats par superposition
a	b	d	K_{IA}	K_{IA}
1	20	5,25	2,836	2,823
1	2	0,75	2,357	2,358
1	0,2	0,133	2,003	2,011

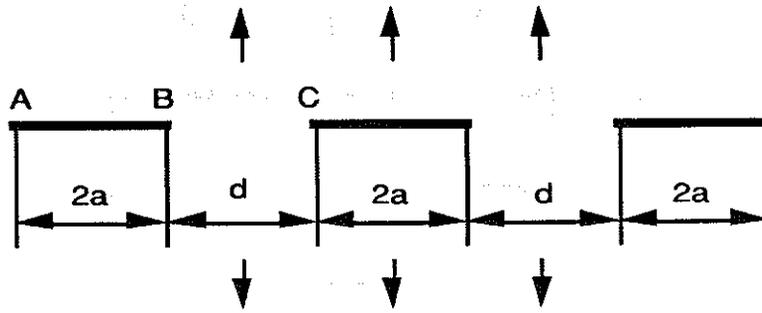


Figure 1. 10 : trois fissures identiques alignées.

géométrie		résultats connus(exacts)			résultats par superposition		
a	d	K_{IA}	K_{IB}	K_{IC}	K_{IA}	K_{IB}	K_{IC}
1	18	1,775	1,776	1,776	1,775	1,776	1,776
1	2	1,837	1,877	1,908	1,841	1,885	1,915
1	0,5	1,970	2,278	2,338	2,031	2,437	2,479
1	0,222	2,070	2,780	2,826	2,262	3,448	3,416

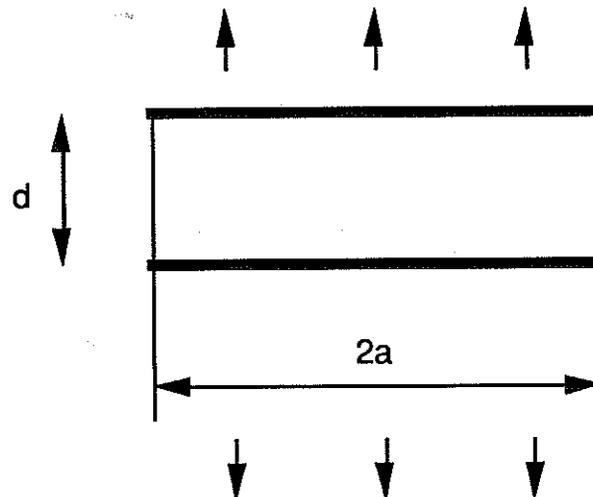


Figure 1. 11 : deux fissures identiques parallèles superposées.

géométrie		résultats connus(à 5%)	résultats par superposition
a	d	K_I	K_I
1	10	1,745	1,747
1	2,5	1,547	1,544
1	1,0	1,342	1,363
1	0,2	1,179	1,276

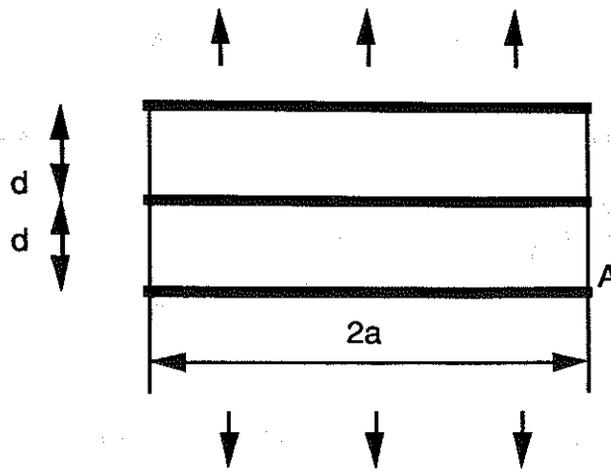


Figure 1. 12 : trois fissures identiques parallèles superposées.

géométrie		résultats connus (précision 1%)	résultats par superposition
a	d	K_{IA}	K_{IA}
1	10	1,741	1,741
1	2,5	1,507	1,502

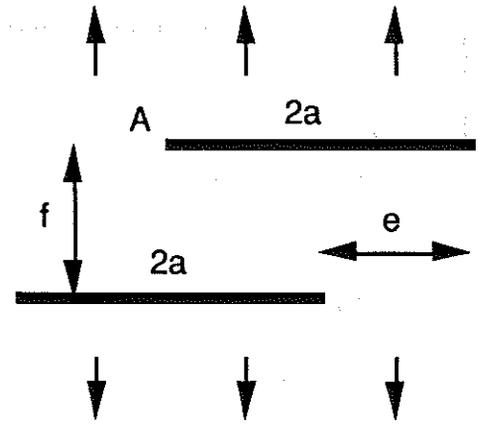


Figure 1. 13 : deux fissures identiques parallèles.

géométrie			résultats connus (précision 2%)	résultats par superposition
a	e	f	K_{IA}	K_{IA}
1	2	2	1,737	1,722
1	2,3717	0,7906	2,2	2,185
1	2,2112	0,2211	2,75	2,695

1. 8. OUVERTURE DES FISSURES

Il apparaît désormais nécessaire de valider le calcul par la vérification à posteriori de l'état d'ouverture des fissures.

La superposition permet aussi de calculer les champs de déplacements. Si $O_F(n,x)$ est l'ouverture de fissure à l'abscisse x due au chargement suivant le polynôme de Legendre d'ordre n , il suffit de cumuler les $O_F(n,x)$ suivant leur poids respectifs, c'est à dire :

$$U_1(x) = \sum_{n=0}^p d(i,1,n) * O_F(n,x) \quad (1.8.1)$$

$$\text{et } U_2(x) = \sum_{n=0}^p d(i,2,n) * O_F(n,x) \quad (1.8.2)$$

Les solutions analytiques sont telles que $O_F(n,x)$ est le même pour $P(t)$ et $Q(t)$ et au facteur $(1+\nu)*(1-\nu)$ près si l'on passe des contraintes planes aux déformations planes. Les fonctions $O_F(n,x)$ sont analytiquement connues.

Les déplacements dans le milieu peuvent aussi être calculés sous réserve de connaître les primitives des potentiels complexes mis en jeu. On montrera plus loin que la seule connaissance des ouvertures des fissures permet néanmoins de calculer rapidement l'énergie globale fournie par les efforts extérieurs.

1. 9. L'OUTIL DE CALCUL - RESULTATS

1. 9. 1. OUTIL ACTUEL

La méthode originale programmée en langage FORTRAN est installée sur des stations de travail de type "APOLLO 3000". Chacune des fissures peut être discrétisée en un nombre variable de points pour l'intégration (calcul du produit scalaire). Il est possible d'utiliser les 5 premiers polynômes de Legendre (calcul jusqu'à l'ordre 4). Pour les exemples traités dans tout ce document, le temps de calcul est indépendant de la géométrie qui est définie par les coordonnées de chaque fissure. Les résultats fournis sont :

*les facteurs d'intensité des contraintes en mode I et II à chaque extrémité de fissure,

*les coefficients $d(i,m,n)$ des distributions internes d'efforts (y compris les efforts de frottement du chapitre suivant),

*les ouvertures de fissures $U_1(x)$ et $U_2(x)$,

*l'énergie élastique liée à l'ouverture des fissures (travaux des efforts extérieurs),

*les contraintes et déplacements dans le milieu.

La pratique montre qu'il suffit de travailler à l'ordre 2 et de discrétiser en 30 éléments pour obtenir rapidement des résultats précis.

1. 9. 2. ACCELERATION DES CALCULS

Le temps de calcul peut être réduit de façon analogue aux techniques d'équations intégrales aux frontières en considérant la distance qui sépare deux éléments pour choisir le nombre de points nécessaires à l'intégration ainsi que l'ordre jusqu'auquel il faut décrire les répartitions de contraintes.

Soit d la distance qui sépare les points les plus proches de deux éléments i et j (fissures, pores, bords...) et a et a' leur taille respective (longueur, rayon...). Pour le calcul de l'effet de i sur j on évaluera le rapport $\frac{a'}{d}$ afin de choisir les paramètres pré-cités. Une étude préliminaire est nécessaire afin d'effectuer les bons tests sur $\frac{a'}{d}$ qui détermineront les bons choix d'ordre et de nombre de points d'intégration.

Du point de vue informatique, la construction d'un tel système où le nombre d'inconnues peut être différent pour chaque élément nécessitera l'utilisation de "pointeurs".

Un calcul parallèle permettrait de réduire les temps de calcul car les coefficients de la matrice sont indépendants. Pour l'instant, seule l'inversion de matrice est parallélisée pour les calculs sur Alliant FX8 (merci à J. L. Fléjou pour cette application). Pour les mêmes raisons la phase finale du calcul consistant à évaluer les contraintes et déplacements dans le milieu est aussi sujette à parallélisation.

1. 10. EXEMPLE DE RESULTATS - COALESCENCE DE FISSURES

Le phénomène de localisation est pressenti à l'heure actuelle comme la coalescence de fissures et microfissures soumises aux interactions avec d'autres fissures, des vides et des inclusions. Nous tentons à l'aide d'exemples simples de nous forger une intuition quant à l'évolution de systèmes de fissures seules sous divers types de chargements uniformes.

Nous avons choisi d'étudier des fissures "en étoile" comprises dans un cercle de rayon unité. Elles sont régulièrement réparties tous les $\frac{2\pi}{n}$, n étant le nombre de fissures. La sollicitation extérieure est un état de bi-traction. On constate que pour 2 et 3 fissures on a tendance à coalescence vers le centre et pour n supérieur à 3 il existe une longueur "critique" au delà de laquelle la progression du système s'effectue vers l'extérieur du cercle. Sans constituer une étude de stabilité puisque la symétrie n'est jamais rompue, cet exemple révèle la faiblesse de l'intuition dans ce type de cas.

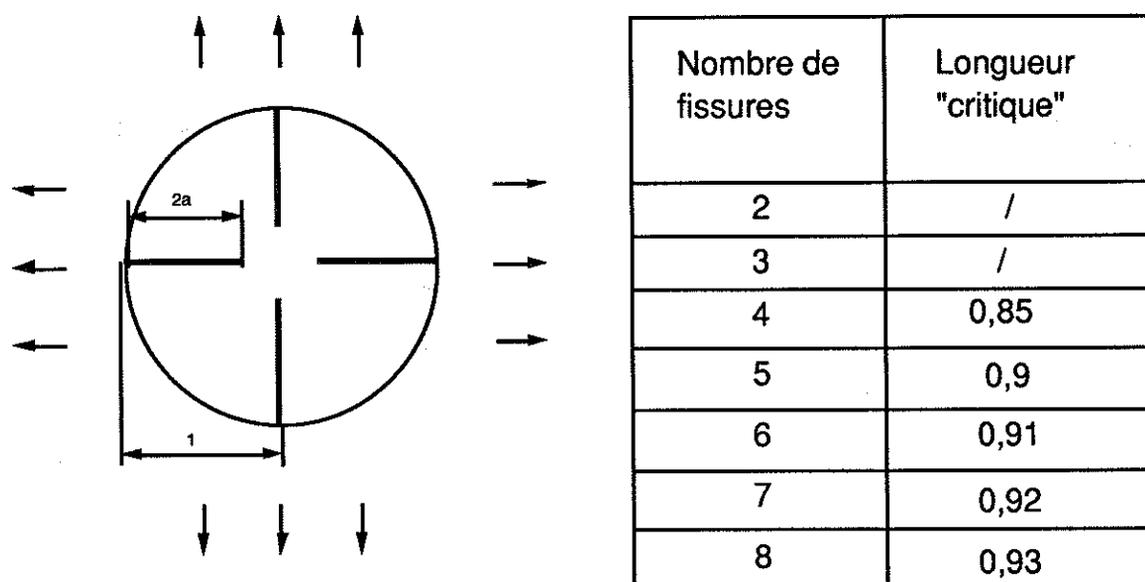


Figure 1. 14 : exemple pour $n=4$. Tableau 1. 1 : longueurs critiques.

Commentaires : pour 4 fissures la longueur critique de la fissure ($2a = 2a_c$) est atteinte pour environ $2a=0,85$, c'est dire que le facteur d'intensité des contraintes côté intérieur du cercle devient supérieur à celui côté extérieur du cercle dès que la distance qui sépare la fissure du centre du cercle devient inférieure à 15% du rayon.

Ce type d'exemple met en évidence "l'effet d'écran" lorsque les interactions déchargent les fissures. Il est visible lorsqu'on compare le facteur d'intensité des contraintes ainsi obtenu à ce qu'il serait pour la même fissure seule en milieu infini sous le même chargement extérieur.

Ce cas illustre aussi évidence les capacités de la méthode avant les présents développements. Toutes les fissures sont ouvertes par raison de symétrie. Le cas où les fissures se croisent peut être abordé [KACHANOV 89] par cette méthode de façon satisfaisante.

Les courbes suivantes tracent l'évolution des facteurs d'intensité des contraintes au centre et côté extérieur pour des fissures placées symétriquement

sur les rayons d'un cercle de diamètre 2. La valeur $K_{I\infty}$ correspond à une fissure seule en milieu infini, c'est à dire la valeur de K_I si l'on néglige les interactions. On rappelle que :

$$K_{I\infty} = \sigma \sqrt{\pi a} \text{ où } \sigma \text{ est la contrainte de traction.}$$

L'intuition est parfois insuffisante pour prédire de la propagation car les interactions peuvent aussi bien avoir un effet amplificateur [CHUDNOVSKI 87]. Pour les réseaux de la figure 1. 15 les calculs ont été menés à l'ordre 2 et les intégrations numériques ont utilisé 30 points régulièrement répartis sur chaque fissure. La propagation d'une grande fissure est favorisée par la présence de micropores ou de microfissures à son extrémité.

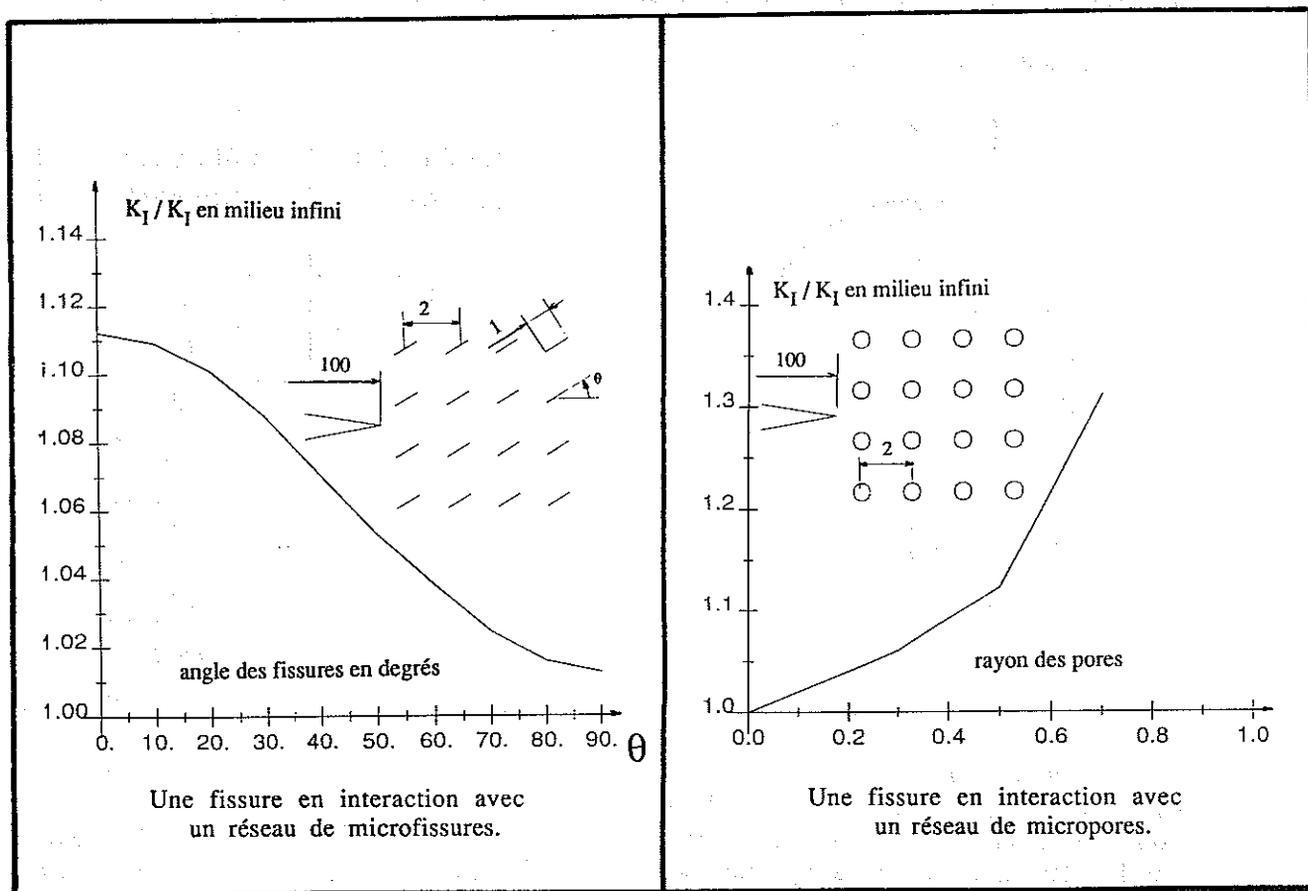


Figure 1. 15 : propagation d'une fissure vers un réseau.

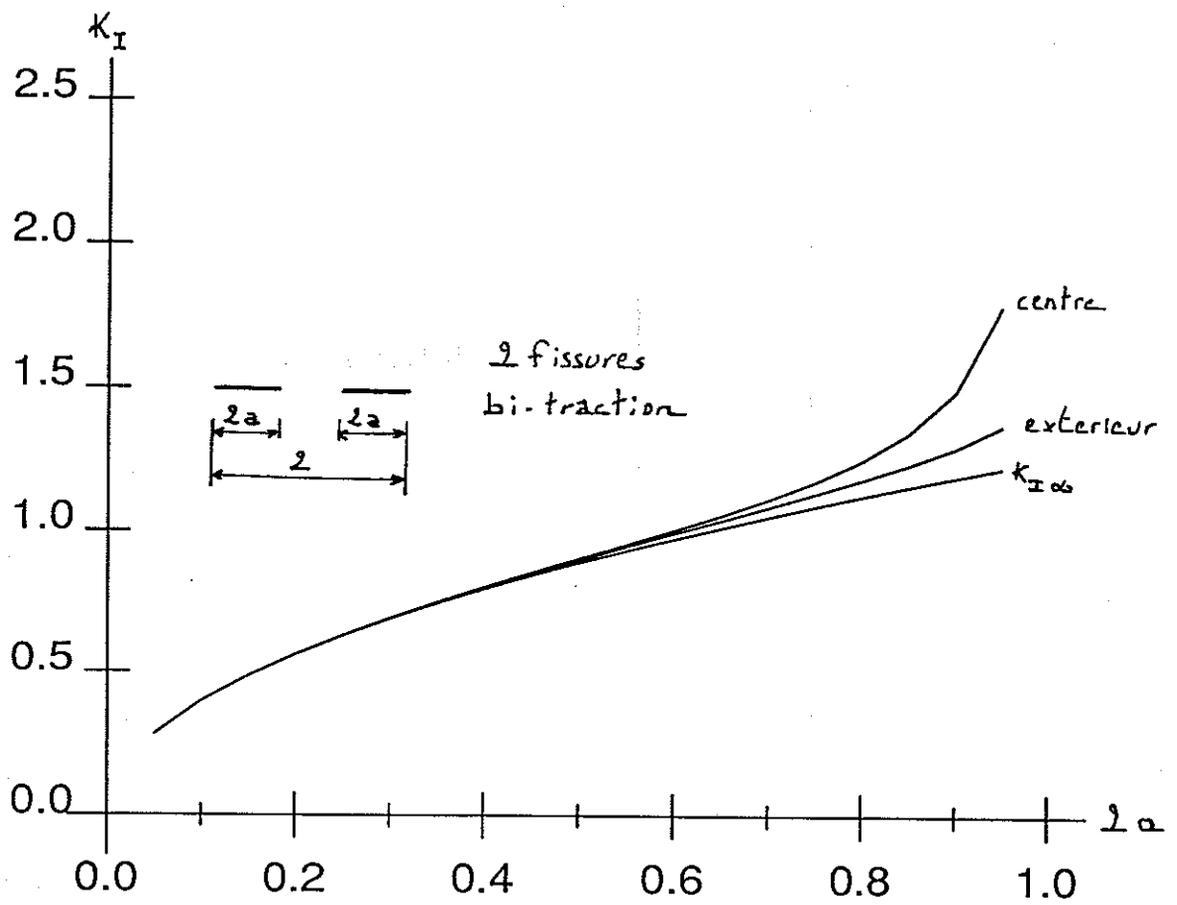


Figure 1. 16 : facteurs d'intensité des contraintes pour 2 fissures.

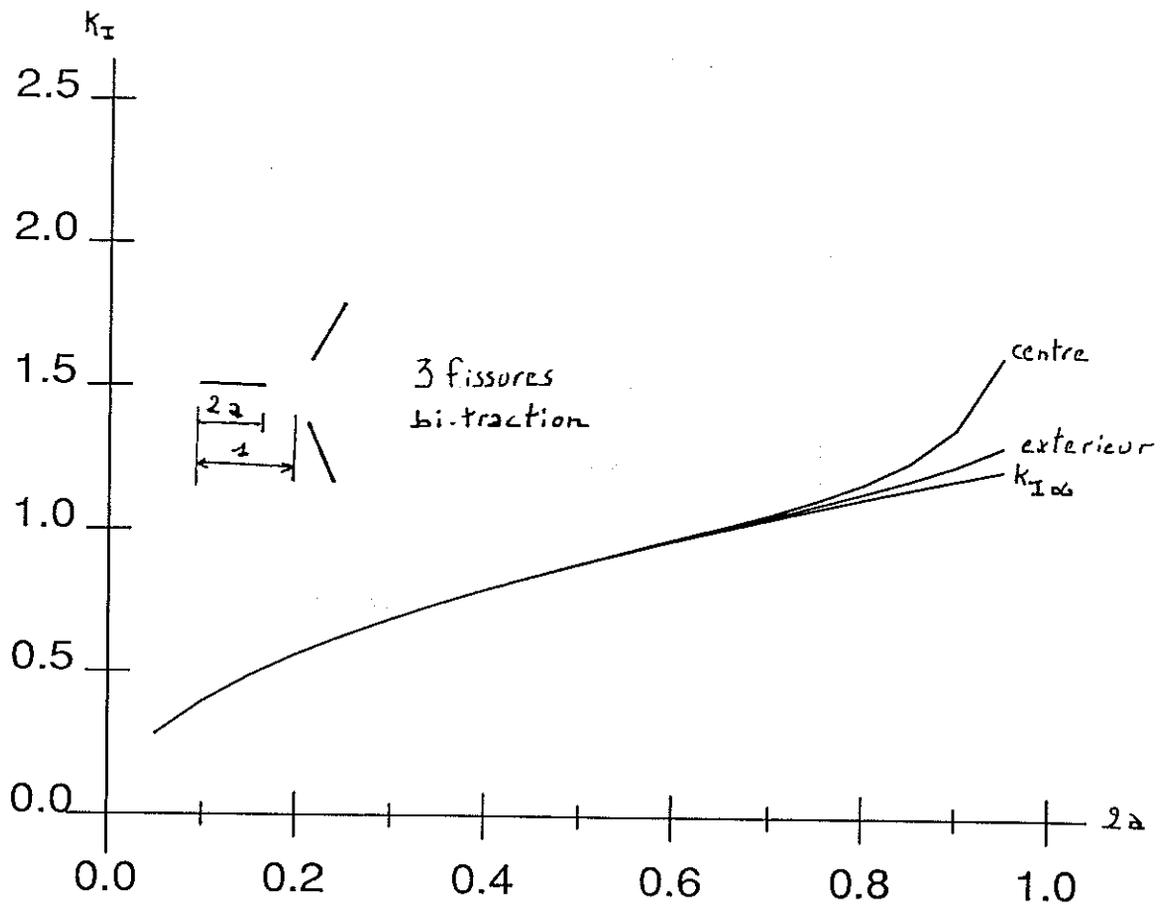


Figure 1. 17 : facteurs d'intensité des contraintes pour 3 fissures.

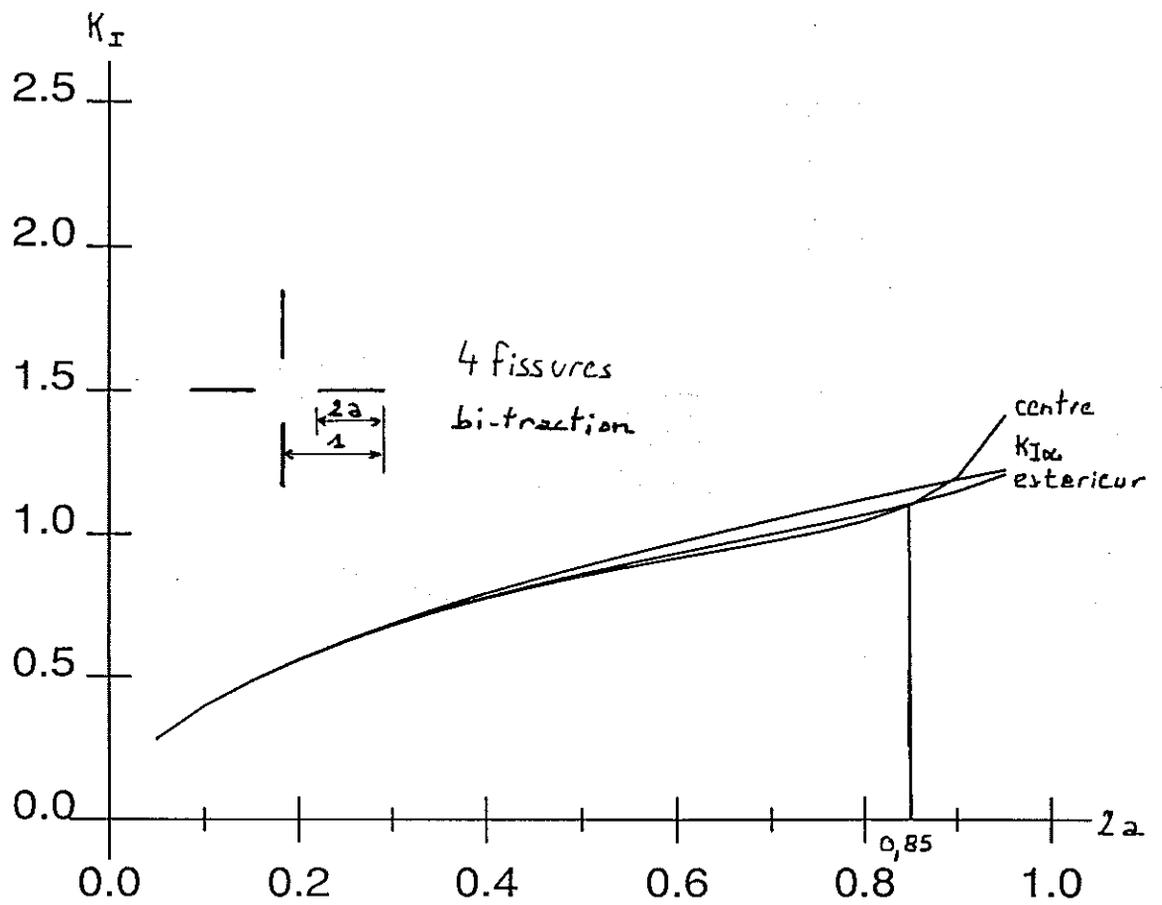


Figure 1. 18 : facteurs d'intensité des contraintes pour 4 fissures.

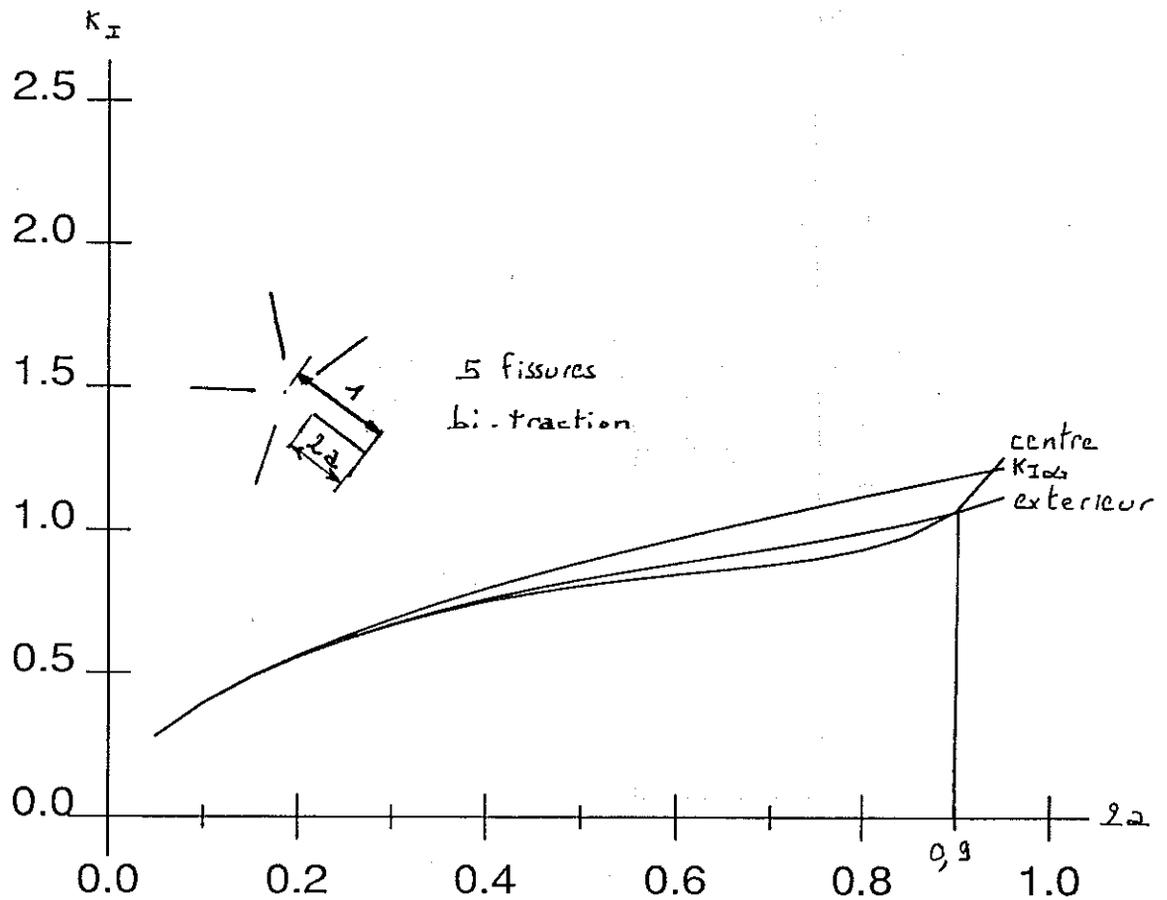


Figure 1. 19 : facteurs d'intensité des contraintes pour 5 fissures.

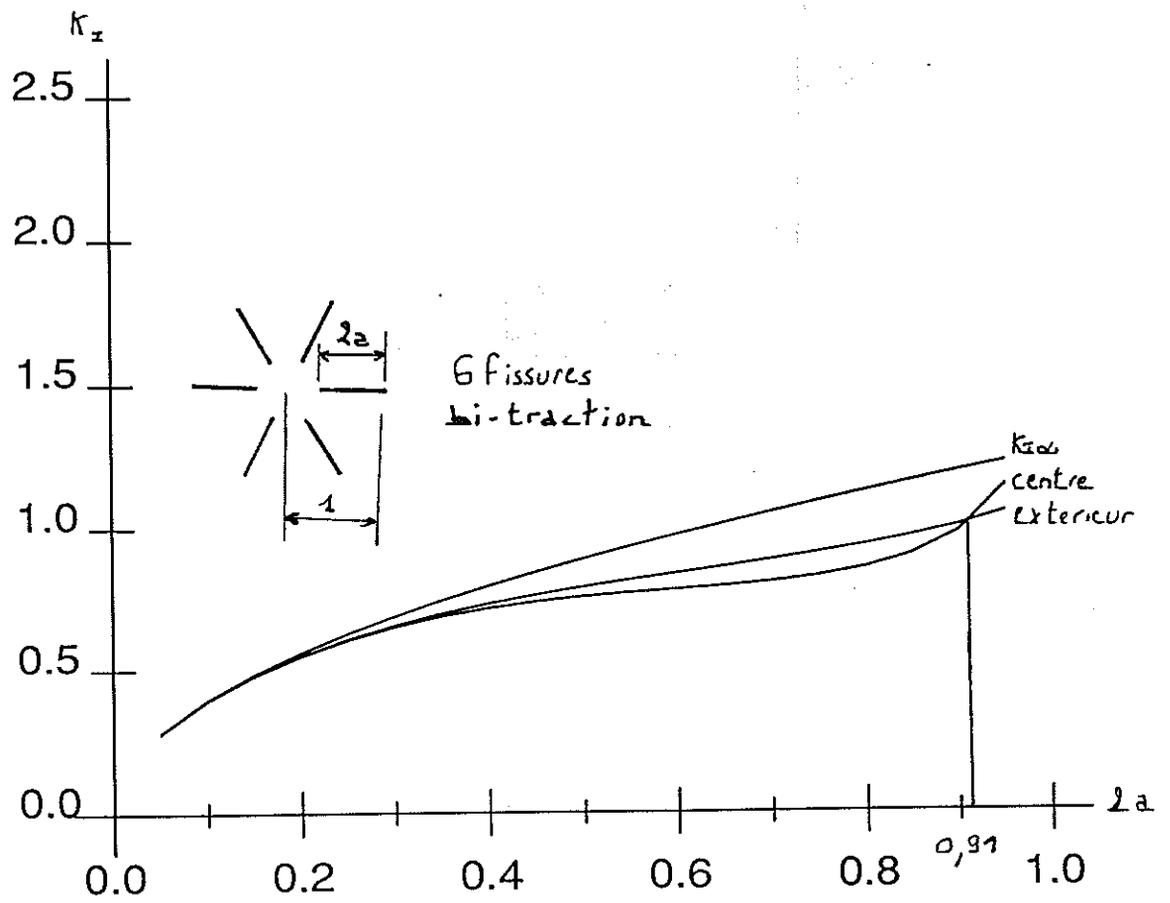


Figure 1. 20 : facteurs d'intensité des contraintes pour 6 fissures.

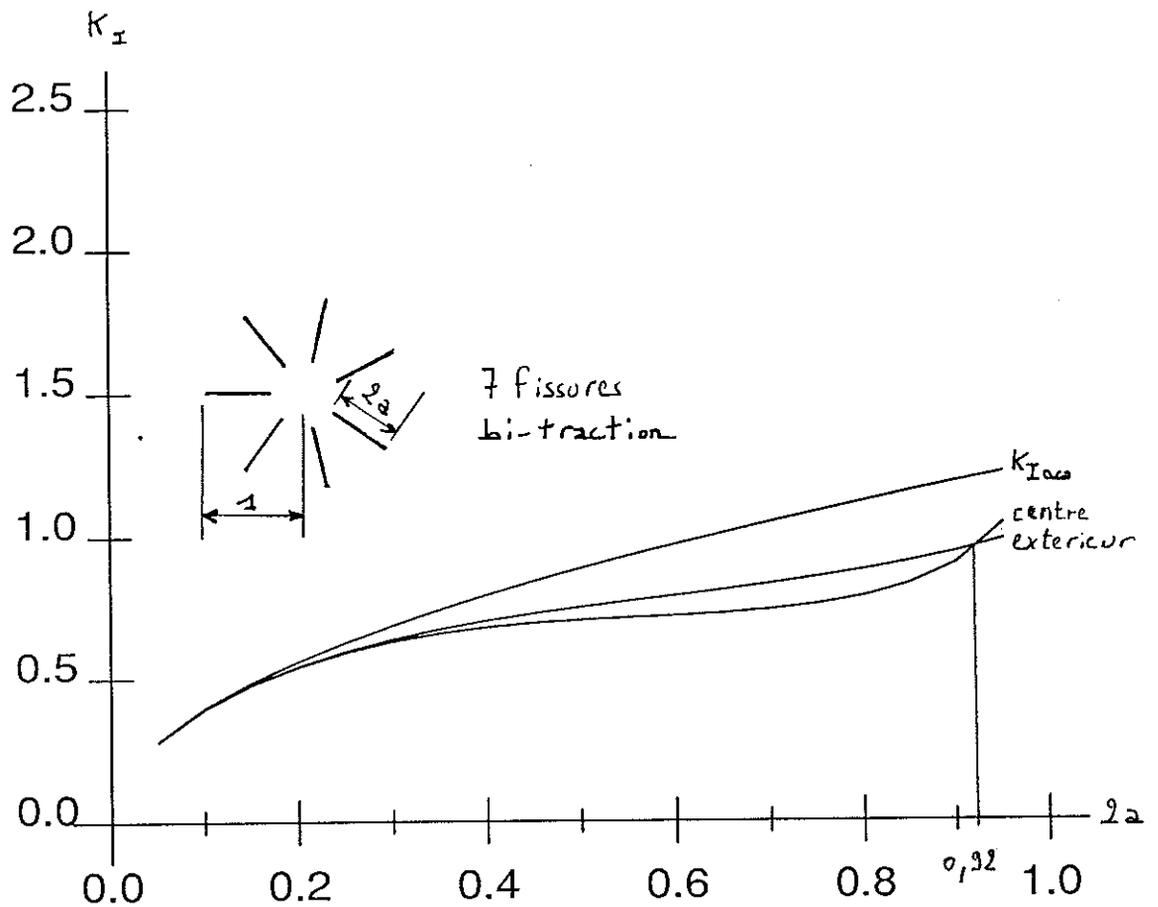


Figure 1. 21 : facteurs d'intensité des contraintes pour 7 fissures.

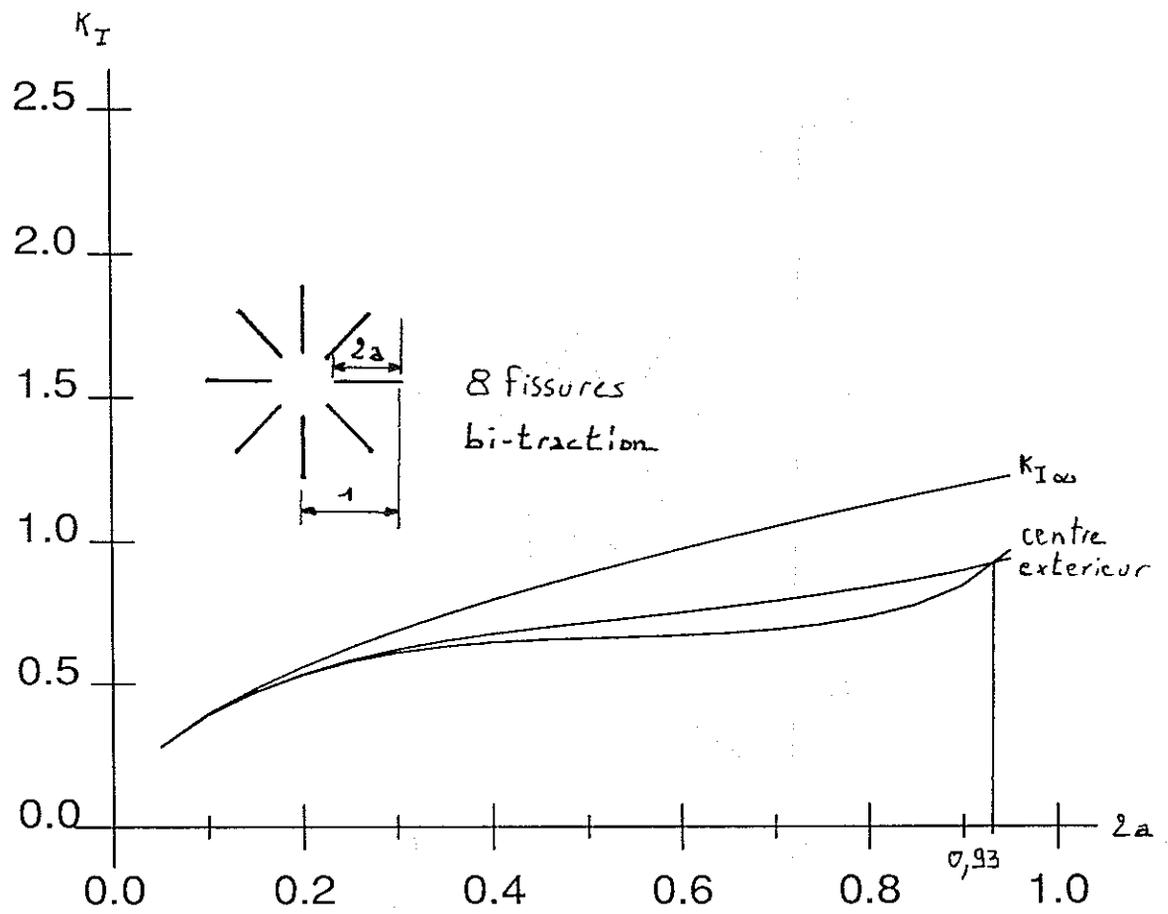


Figure 1. 22 : facteurs d'intensité des contraintes pour 8 fissures.

1. 11. PASSAGE EN MILIEUX FINIS

1. 11. 1. CONDITIONS AUX LIMITES

La prise en compte des conditions aux limites sur des frontières est importante pour se rapprocher de la réalité expérimentale. Les effets de bords ne peuvent pas être à priori négligés devant les interactions en milieux infinis.

Le développement des logiciels de calculs mathématiques formels permet aujourd'hui de construire, sans difficulté et avec rapidité des méthodes de calculs semi-analytiques. En mécanique de la rupture, cette génération d'outil semble adaptée à la prise en compte des singularités. Afin de pouvoir quantifier les effets de bords et de rendre finies les énergies, une technique de résolution en milieu fini est présentée ici. Quoique des conditions aux limites en déplacement permettent des calculs pour des réseaux périodiques seul le cas des conditions aux limites en contraintes est pour l'instant envisagé.

1. 11. 2. CONSTRUCTION DES ELEMENTS DE FRONTIERE

Des éléments de frontière rectilignes sont construits à partir de la solution de BOUSSINESQ pour une force appliquée à un milieu semi-infini en deux dimensions. Par nature ces éléments ne permettent de traiter que des milieux convexes puisque les différentielles des contraintes tangentielles au voisinage de la frontière du milieu semi-infini sont non nulles. Ceci provoque des discontinuités de contrainte (correspondant à σ_{xx} sur la figure 1. 23) si l'on traite des milieux non convexes.

La solution à un problème en milieu fini est la superposition de champs de contraintes respectant les lois de l'élasticité linéaire (avec l'hypothèse des petites perturbations) et les conditions aux limites. La qualité de notre solution dépend de l'ordre du développement polynomial. Le logiciel de calcul formel " MACSYMA " fut utile pour construire une bibliothèque d'éléments de frontière comprenant les solutions analytiques pour des polynômes de degré inférieur à 5.

Solution de BOUSSINESQ :

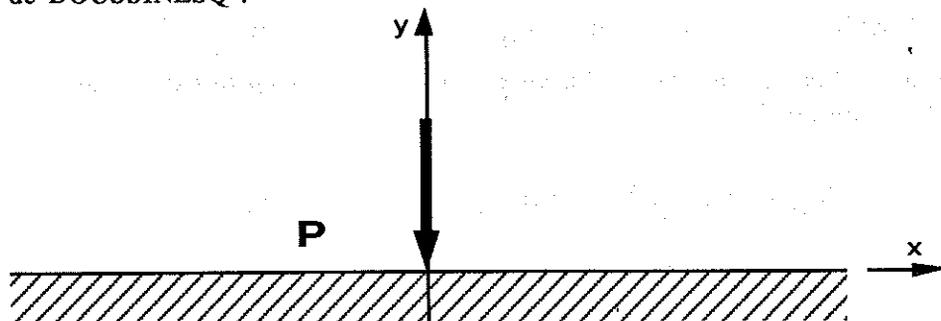


Figure 1. 23 : charge ponctuelle normale appliquée à un milieu semi-infini.

Les contraintes dans le milieu sont données par :

$$\sigma_{xx} = \frac{-2Px^2y}{\pi(x^2+y^2)^2} \quad \sigma_{xy} = \frac{-2Py^2x}{\pi(x^2+y^2)^2} \quad \sigma_{yy} = \frac{-2Py^3}{\pi(x^2+y^2)^2} \quad (1. 11. 1)$$

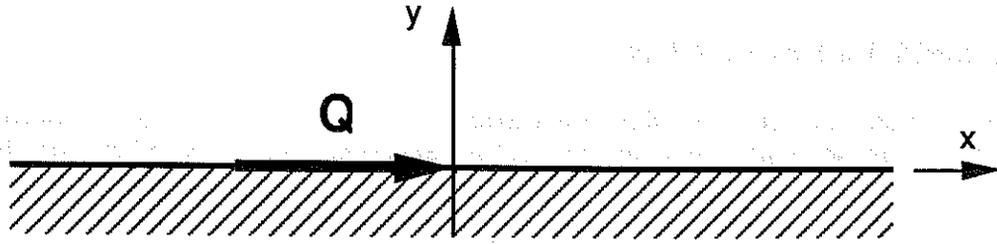


Figure 1. 24 : charge ponctuelle tangentielle appliquée à un milieu semi-infini.

Les contraintes dans le milieu sont données par :

$$\sigma_{xx} = \frac{-2Qx^3}{\pi(x^2+y^2)^2} \quad \sigma_{xy} = \frac{-2Qx^2y}{\pi(x^2+y^2)^2} \quad \sigma_{yy} = \frac{-2Qy^2x}{\pi(x^2+y^2)^2} \quad (1. 11. 2)$$

Eléments de la bibliothèque de fonctions :

Nous allons approximer les répartitions de contraintes à l'aide d'une base polynomiale. Il faut donc construire à partir de la solution de BOUSSINESQ les champs de contraintes dus à ces types de chargement. Chaque solution est obtenue en intégrant la solution de BOUSSINESQ sur un intervalle $[-1, +1]$ avec un effort P réparti suivant des monômes $(1, x, x^2, x^3, x^4)$. Pour les effets d'une répartition

suivant une base polynomiale quelconque, on effectue des combinaisons linéaires des expressions obtenues. On évaluera la contrainte aux coordonnées (x, y) induite par un élément de longueur $2l$ à l'aide des éléments de bibliothèque en procédant par homothétie.

Les contraintes étant connues partout dans le milieu on peut construire l'opérateur linéaire non symétrique \mathfrak{B}_{ji} analogue à celui de l'expression (1. 5. 1), en respectant les notations choisies pour les expressions du paragraphe "Formulation générale" :

$$\mathfrak{B}_{ji} (D_j(x_j)) = - \sigma_i(x_i) \quad \text{et} \quad \mathfrak{B}_{jj} = \text{Id} \quad (1. 11. 3)$$

σ_i est la répartition de contraintes normales et tangentielles dans la région occupée par la fissure i ou la frontière i et $\sigma_i(x_i)$ est sa valeur au point x_i . La matrice d'influence est ensuite construite comme exposé précédemment :

$$\beta(i,m,n,j,k,l) = \frac{1}{\|L_n\|^2} \int_{-1}^{+1} \mathfrak{B}_{ji}(d(j,k,l)) L(n,x) dx \quad (1. 11. 4)$$

La solution du problème sera donnée par :

$$[[F_{ji}] + [B_{ji}]] \vec{D} = \vec{S} + \vec{F} \quad (1. 11. 5)$$

où \vec{D} est le vecteur des répartitions cherchées et \vec{S} celui des conditions aux limites. Deux possibilités s'offrent pour \vec{S} :

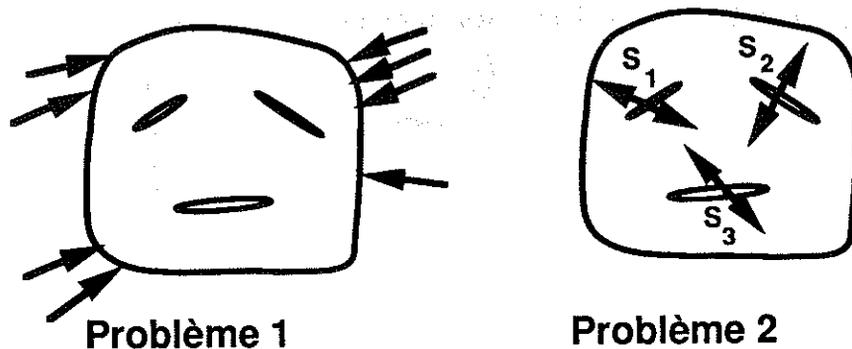


Figure 1. 25 : le même problème peut être résolu de deux façons différentes.

1 - traiter le problème par superposition des contraintes du milieu non fissuré soumis au chargement extérieur à celles induites par les pressions dans les fissures. Les termes s_i relatifs aux frontières sont alors nuls (on traite le problème 2).

2 - imposer directement les contraintes sur les frontières en respectant les conditions de bords libre de contraintes sur les lèvres de fissures. Les termes s_i relatifs aux fissures sont alors nuls (on traite directement le problème 1).

La première méthode par superposition convient mieux aux calculs des facteurs d'intensité des contraintes car les conditions aux limites sont directement ramenées dans les fissures et ne transitent pas par les frontières du domaine.

1. 11. 3. ERREUR SUR LES CONDITIONS AUX LIMITES

La solution ainsi obtenue n'assure pas la continuité du tenseur des contraintes sur la frontière du domaine. En particulier, des discontinuités apparaissent dans les coins qui appartiennent à deux éléments de bord différents. La symétrie du tenseur des contraintes ne peut être assurée que dans des cas particuliers.

L'effet de ces discontinuités reste localisé et de ce fait ne perturbe pas la solution globale. Les facteurs d'intensité des contraintes (figure 1. 29) sont identiques ou peu différents des solutions analytiques ou approchées. On peut de plus quantifier la différence entre les conditions aux limites imposées et le champ des contraintes reconstruit sur les éléments de frontière pour vérifier que l'erreur commise reste faible.

Pour plus d'efficacité des éléments coins spécifiques devraient être utilisés. Cependant lorsqu'on utilise des éléments de "petite longueur" aux voisinages des coins on se rapproche des conditions aux limites désirées (voir les résultats fournis en annexe).

1. 11. 4. VALIDATION DES RESULTATS EN MILIEUX FINIS

Les sollicitations sont des états de traction avec une contrainte unité.

Les calculs par superposition ont été effectués à l'ordre 4 et on fait intervenir 8 éléments identiques pour chaque côté de rectangle, et 50 points ont été utilisés pour calculer les intégrales (produits scalaires).

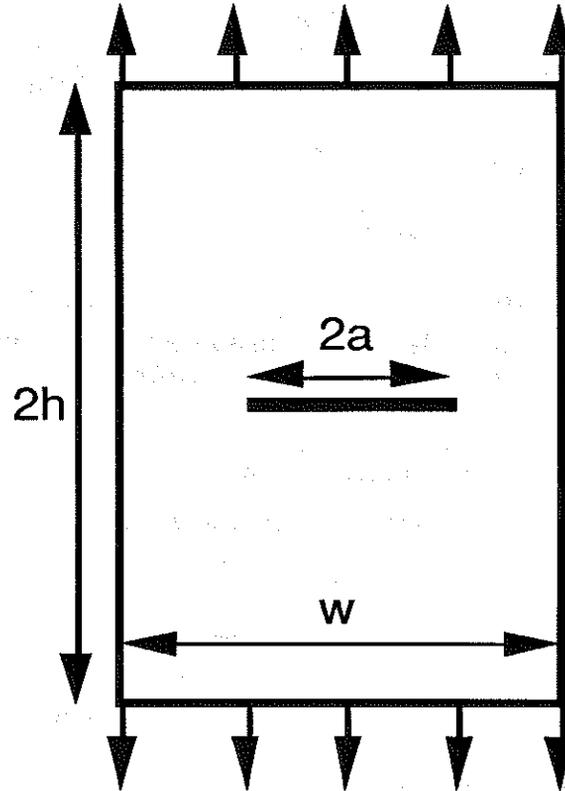


Figure 1. 26 : fissure centrée dans une plaque rectangulaire sous tension uniforme unité.

Y. Murakami ,(1988), " Stress intensity factors handbook " , Pergamon Press.

géométrie			résultats connus(précision 1%)	résultats par superposition
a	w	2h	K_{IA}	K_{IA}
3	15	24	3,44	3,43
1	4	2	3,49	3,49
1	2,857	2	3,88	3,88
1	2,857	1,143	6,50	6,50

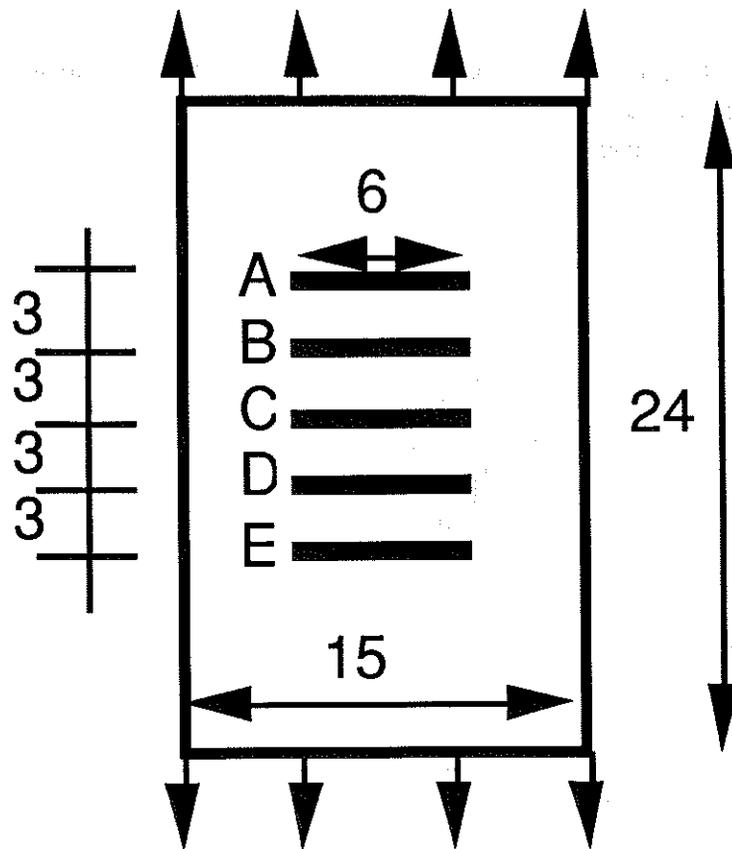


Figure 1. 27 : cinq fissures centrées dans une plaque rectangulaire sous tension uniforme unité.

L. Guang Ting et Z. Rui Zhong , (1991) ,

" Engineering Fracture Mechanics , vol.35 n° 1/2/3 , p.67-78 "

fissure	K_I L. G. T. et Z. R. T. (erreur non quantifiée)	résultats par superposition
A	2,384	2,983
B	1,678	2,010
C	1,621	1,910
D	1,678	2,010
E	2,385	2,983

Remarque : si la fissure C est seule présente alors $K_I = 3,44$.

EXEMPLE : UNE FISSURE CENTREE DANS UNE PLAQUE CARREE

○ K (erreur 1%)

△ K (nos resultats)

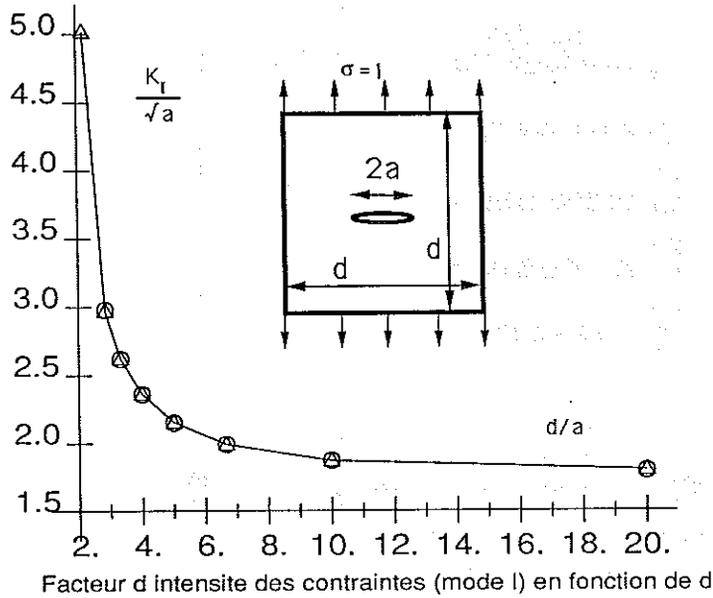


Figure 1. 28 : fissure de taille variable dans une plaque carrée.

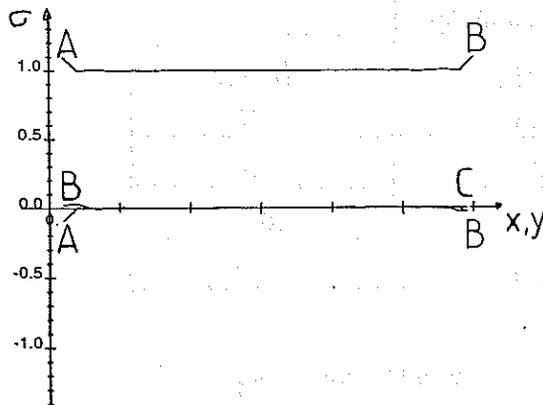
QUALITE DES CONDITIONS AUX LIMITES

a l ordre 2 (30 points) et pour 24 bords

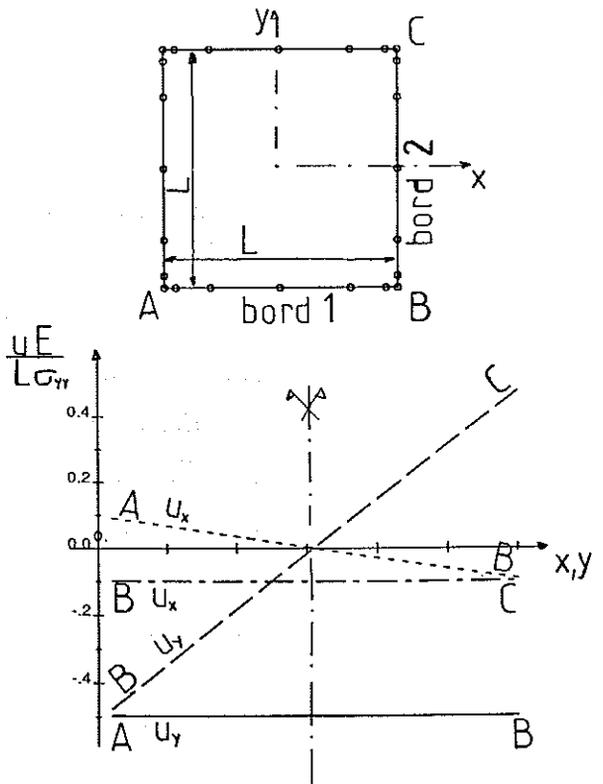
TRACTION SIMPLE AXE Y

coeff. de poisson:0.2

- :bord 1 cont. norm. et depl. vert. (U_y)
- - - -:bord 1 cont. tang. et depl. hori. (U_x)
- :bord 2 cont. norm. et depl. vert.
- - - -:bord 2 cont. tang. et depl. hori.



contrainte aux frontieres



deplacements aux frontieres

Figure 1. 29 : reconstruction des champs de contraintes et déplacements.

1. 12. PRISE EN COMPTE DE CAVITES CIRCULAIRES

1. 12. 1. SOLUTION ANALYTIQUE

Le premier pas vers la modélisation des matrices comportant des vides consiste à évaluer l'effet de la présence de cavités circulaires. Les inclusions circulaires feront l'objet de perspectives [HORII 85].

Du fait de la géométrie particulière de ce type d'éléments, une décomposition en série de FOURIER des répartitions de contraintes a été adoptée.

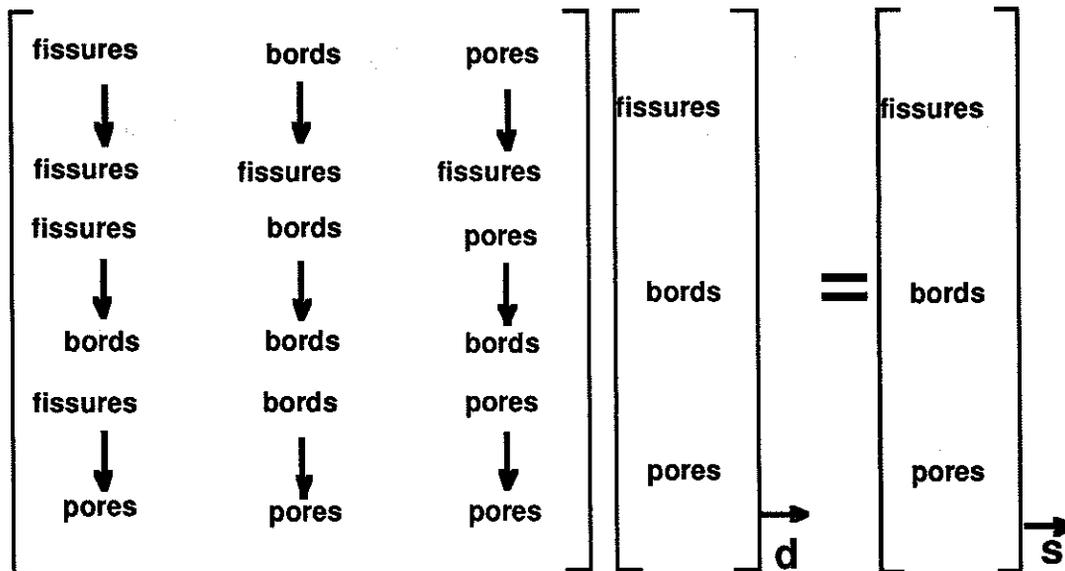
Timoshenko et Goodier ont donné la fonction d'Airy pour des éléments plans circulaires (cavités, disques...) soumis à des contraintes extérieures. L'absence de forces volumiques et l'équilibre statique restreint les premiers termes des développements en série de Fourier (voir le paragraphe 4. 3.).

1. 12. 2. FORMULATION GENERALE

De façon analogue à l'expression (1. 5. 1), on fait apparaître un opérateur linéaire non symétrique \mathcal{P}_{ij} qui traduit l'influence d'un pore en milieu infini soumis à des chargements normaux et tangentiels sur le vecteur des contraintes pour une facette quelconque de ce milieu :

$$\mathcal{P}_{ij}(\vec{D}_j(x_j)) = -\sigma_i(x_i) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{ij} = \text{Id} \quad (1. 12. 1)$$

La construction de la matrice d'interaction s'effectue ensuite. Elle contient différents blocs :



Cette matrice est non symétrique et contient des termes nuls relatifs aux influences des éléments sur eux-mêmes (sauf le terme diagonal unité : opérateur identité).

Les coefficients d'influence sont évalués à l'aide des \mathcal{P}_{ij} , \mathcal{B}_{ij} et \mathcal{F}_{ij} (paragraphe suivant).

1. 12. 3. COEFFICIENTS A DETERMINER

Dans un milieu infini plan, on applique des contraintes sur un contour circulaire ; \vec{n} étant la normale extérieure au contour et \vec{t} le vecteur orthogonal direct à cette normale :

$$p = (\sigma(r, \theta) \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

$$q = (\sigma(r, \theta) \cdot \vec{n}) \cdot \vec{t} \quad (1. 12. 2)$$

Si l'on exprime p et q par un développement en série de Fourier,

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \quad (1. 12. 3)$$

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta \quad (1. 12. 4)$$

L'équilibre statique du milieu impose :

$$C_0 = 0$$

$$A_1 = -D_1 \text{ et } B_1 = C_1$$

Il conviendra donc, si l'on arrête le développement à l'ordre p d'évaluer les constantes :

$$A_0, A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_p, B_p \text{ et } C_2, D_2, \dots, C_p, D_p.$$

Afin de pouvoir différencier les coefficients des sinus et cosinus d'ordre n, on introduit les indices j_{\cos} et j_{\sin} relatifs au pore j.

A l'ordre p on peut écrire :

$$P_{rr}(\theta) = d(j_{\cos}, 1, 0) + d(j_{\cos}, 1, 1) \cos \theta + d(j_{\sin}, 1, 1) \sin \theta + \sum_{n=2}^p d(j_{\cos}, 1, n) \cos n\theta + \sum_{n=2}^p d(j_{\sin}, 1, n) \sin n\theta \quad (1. 12. 5)$$

$$P_{r\theta}(\theta) = d(j_{\sin}, 1, 1) \cos \theta - d(j_{\cos}, 1, 1) \sin \theta + \sum_{n=2}^p d(j_{\cos}, 2, n) \cos n\theta + \sum_{n=2}^p d(j_{\sin}, 2, n) \sin n\theta \quad (1. 12. 6)$$

où $p_{rr}(\theta)$ et $p_{r\theta}(\theta)$ sont les valeurs des efforts appliqués à la surface du pore (respectivement normaux et tangentiels).

1. 12. 4. COEFFICIENTS D'INFLUENCE

Les termes de la matrice d'influence sont évalués ainsi :
Si i est une fissure ou un élément de frontière et j un pore, on applique sur i un champ de pression sur son contour et on calcule les contraintes sur le contour du pore, puis on projette ce champ sur la base de Fourier pour calculer les termes γ .

$$\gamma(i, m, n, j, k, l) = \frac{1}{\|L_n\|^2} \int_{-1}^1 \mathcal{P}_{ij}(d(j, k, l)) \cdot \vec{n}_m L(n, x) dx \quad (1. 12. 7)$$

Si i est un pore, j un autre pore : $q = n + m - 1$.

$$\gamma(i_{\cos}, m, q, j, k, l) = \frac{1}{\delta_{0q} \times 2\Pi + (1 - \delta_{0q}) \times \Pi} \int_0^{2\Pi} \mathcal{P}_{ij}(d(j, k, l)) \cdot \vec{n}_m \cos q\theta d\theta \quad (1. 12. 8)$$

Si i est un pore, j une fissure :

$$\gamma(i_{\sin}, m, q, j, k, l) = \frac{1}{\Pi} \int_0^{2\Pi} \mathcal{F}_{ij}(d(j, k, l)) \cdot \vec{n}_m \sin q\theta d\theta \quad (1. 12. 9)$$

Commentaire : on retrouve ici la description des effets des interaction soit en polynôme de Legendre soit en série de Fourier. Les termes précédant les intégrales correspondent aux valeurs des produits scalaires des éléments des bases choisies.

1. 12. 5. PRECISION

La bibliothèque de fonction pour les pores ainsi construite permet des développements en série de Fourier à l'infini. Dans le cas d'interactions de pores entre eux, on peut dans les cas de forte proximité obtenir une bonne précision en choisissant p grand. Dès qu'il apparaît des éléments bords, on se limitera en pratique à l'ordre 4. Il est possible toutefois de fixer un ordre différent pour chaque élément (voire même un ordre différent pour les contraintes normales et tangentielles).

Sauf dans les cas particuliers de contraintes hydrostatiques et d'absence d'interaction la solution doit être au minimum développée en $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$ pour obtenir le vecteur des conditions aux limites.

1. 12. 6. COEFFICIENTS DE CONCENTRATION DE CONTRAINTE

En calculant à posteriori $\sigma_{\theta\theta}$ à la frontière du pore on obtient facilement le coefficient de concentration de contrainte. On peut, en calculant aussi les

contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ et σ_{rr} s'assurer que les résidus de contrainte par rapport aux conditions aux limites imposées sont faibles.

1. 12. 7. VALIDATION DES RESULTATS POUR LES CAVITES CIRCULAIRES

Les comparaisons faites dans les tableaux suivants montrent que les choix effectués pour traiter le problème des cavités circulaires sont en concordance avec la précision recherchée. Les résultats fournis par la littérature sont, nous l'avons constaté lors de la validation, peu nombreux et concernent essentiellement des géométries avec axe de symétrie et chargements simples. La méthode de superposition permet d'enrichir la gamme d'outil à notre disposition pour traiter les problèmes d'élasticité linéaire (voir par exemple le cas de la plaque trouée en annexe).

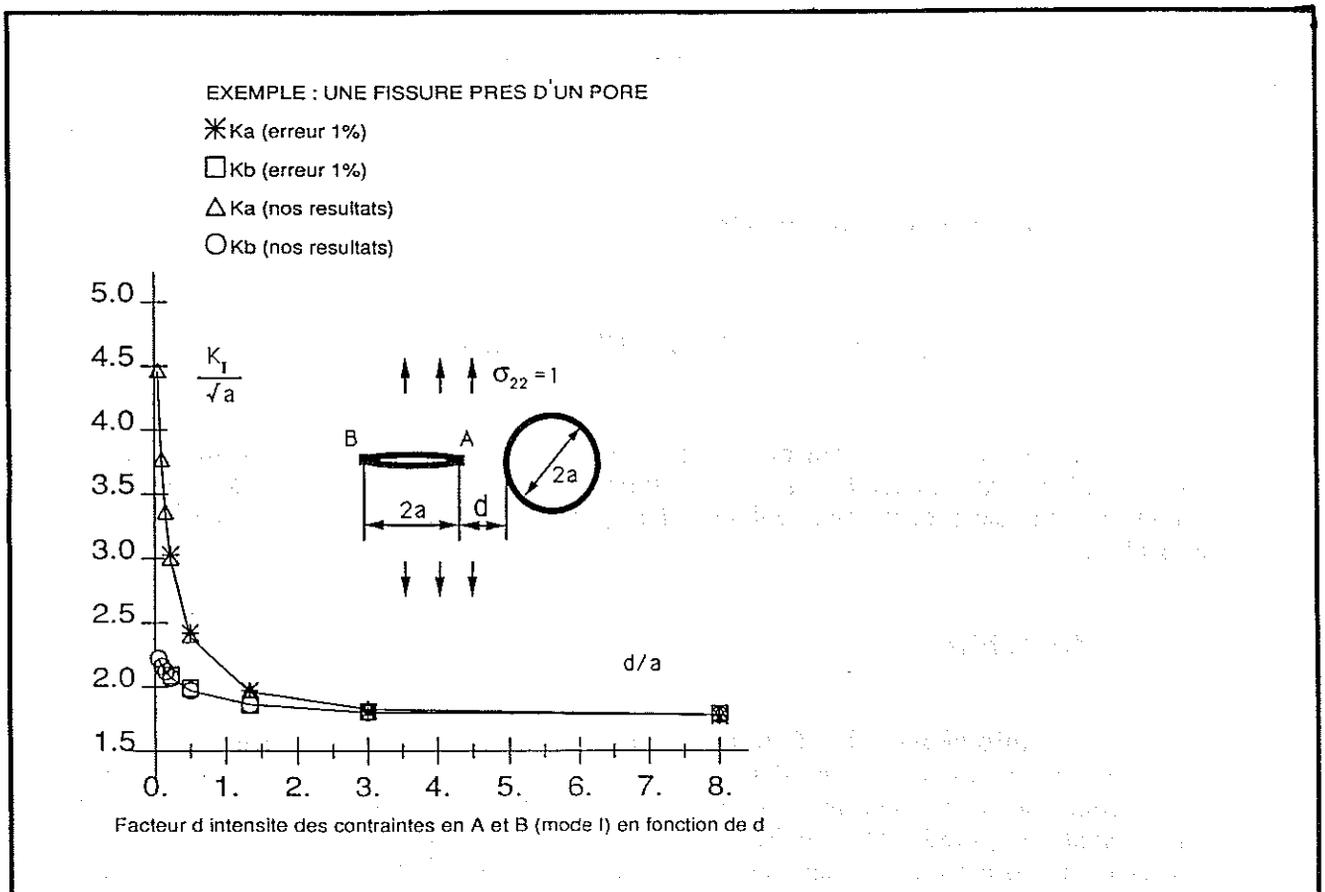


Figure 1. 30 : interaction entre une fissure et une cavité circulaire.

Les calculs avec la méthode de superposition ont été effectués à l'ordre 4 et 100 points ont été utilisés pour les intégrations. Les valeurs fournies en référence ont été lues sur des courbes, de plus leur précision n'est pas toujours communiquée. On compare donc à titre indicatif ces valeurs à celles fournies par la méthode de superposition. Le pourcentage d'écart peut ne pas être significatif, notamment pour les fortes concentrations de contraintes pour lesquelles les courbes tendent vers l'infini.

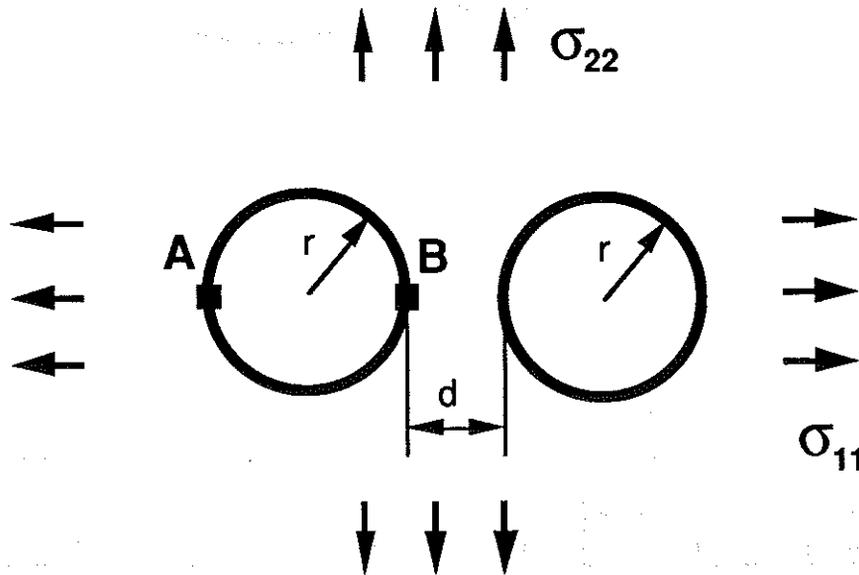


Figure 1. 31 : deux cavités circulaires identiques dans un milieu infini plan.

R. E. Peterson, (1974), " Stress concentration factors " , John Wiley & Sons.

conditions aux limites		géométrie	résultats de référence		résultats par superposition		écart
s_{11}	s_{22}	d/r	C_A	C_B	C_A	C_B	(%)
-1	0	0,5	4	3,3	4,01	3,26	1,2
-1	0	1	3,28	3,16	3,28	3,14	0,6
-1	0	2	3,08	3,06	3,03	3,06	1
-1	-1	0,5	3,7	2,39	3,63	2,38	0,4
-1	-1	1	2,88	2,26	2,87	2,26	0,3
-1	-1	2	2,41	2,16	2,41	2,16	0

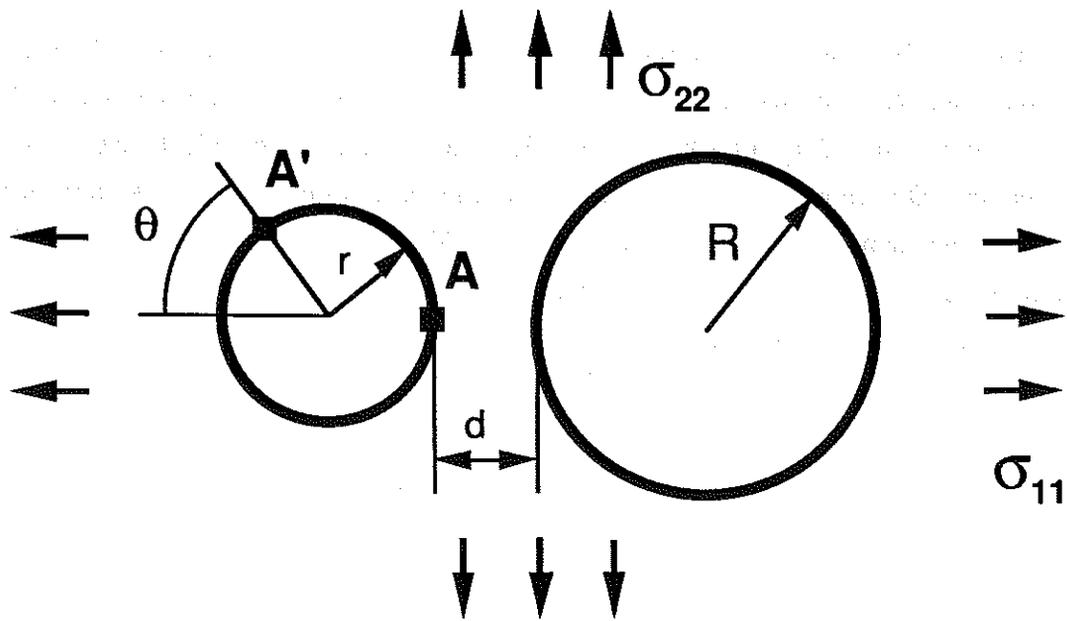


Figure 1. 32 : deux cavités circulaires dans un milieu infini plan.

R. E. Peterson, (1974), " Stress concentration factors " , John Wiley & Sons.

conditions aux limites		géométrie		résultats de référence		résultats par superposition		écart
s_{11}	s_{22}	d/r	R/r	C_A	$C_{A'}$	C_A	$C_{A'}$	(%)
0	-1	5	2	4,4	-	4,4	-	0
0	-1	5	5	3,2	-	3,3	-	3,1
0	-1	10	5	4,1	-	4,1	-	0
-1	-1	2	1	4	-	3,79	-	5,2
-1	-1	2	2	3,1	-	2,97	-	4,2
-1	-1	4	1	4,8	-	4,75	-	1
-1	-1	4	2	3,8	-	3,8	-	0
-1	0	1	0,5	?	2,62	-0,38	2,64	0,8
-1	0	1	1	?	2,66	-0,41	2,66	0
-1	0	1	2	?	2,72	-0,62	2,71	0,4
-1	0	5	1	?	0,82	-0,78	0,81	1,2
-1	0	5	3	?	1,33	-0,22	1,33	0
-1	0	10	3	?	0,58	-0,58	0,59	1

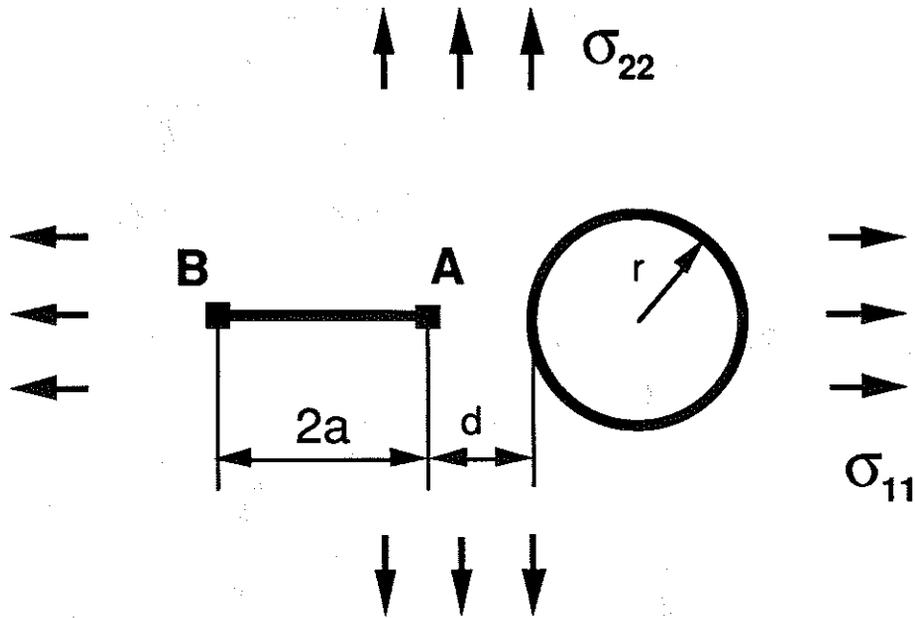


Figure 1. 33 : une fissure en interaction avec une cavité circulaire dans un milieu plan infini.

Y. Murakami (1988), " Stress intensity factors handbook " , Pergamon Press.

conditions aux limites		géométrie		valeurs de référence (précision 1%)		résultats par superposition		écart
s_{11}	s_{22}	a/r	d/r	K_{IA}	K_{IB}	K_{IA}	K_{IB}	(%)
0	-1	1	0,5	2,43	1,97	2,39	1,97	1,6
0	-1	0,5	0,16	2,63	1,63	2,44	1,69	7,2
0	-1	0,4	0,5	1,57	1,36	1,57	1,36	0
-1	0	1	0,5	0	?	0,0011	0,06	-
-1	0	0,5	0,5	0,05	?	-0,02	0,043	-

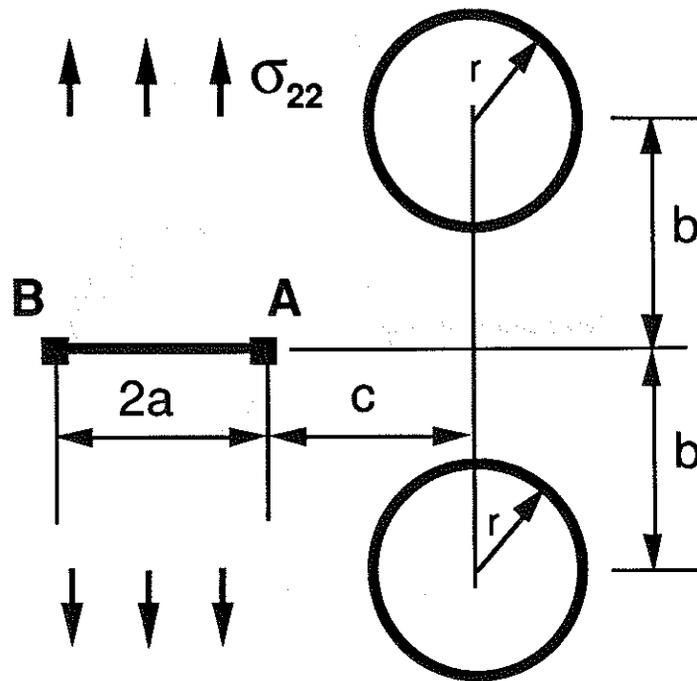


Figure 1. 34 : une fissure en interaction avec deux cavités circulaires placées symétriquement sur un axe perpendiculaire à la fissure, dans un milieu plan infini.

Y. Murakami ,(1988), " Stress intensity factors handbook " , Pergamon Press

$$\sigma_{22} = -1 \text{ et } \sigma_{11} = 0$$

géométrie			valeurs de référence (précision 1%)		résultats par superposition		écart
a/r	b/r	d/r	K _{IA}	K _{IB}	K _{IA}	K _{IB}	(%)
1	3,28	2,29	<i>1,36 ?</i>	1,9	1,68	1,89	<i>0,5 ou 23,5</i>
1	2,83	2,83	1,88	1,93	1,90	1,97	2,1
1	5	0	<i>1,12</i>	<i>1,12</i>	1,49	1,49	33

Des erreurs de correspondance ayant été remarquées dans l'ouvrage de référence, les valeurs en italiques sont sujettes à caution.

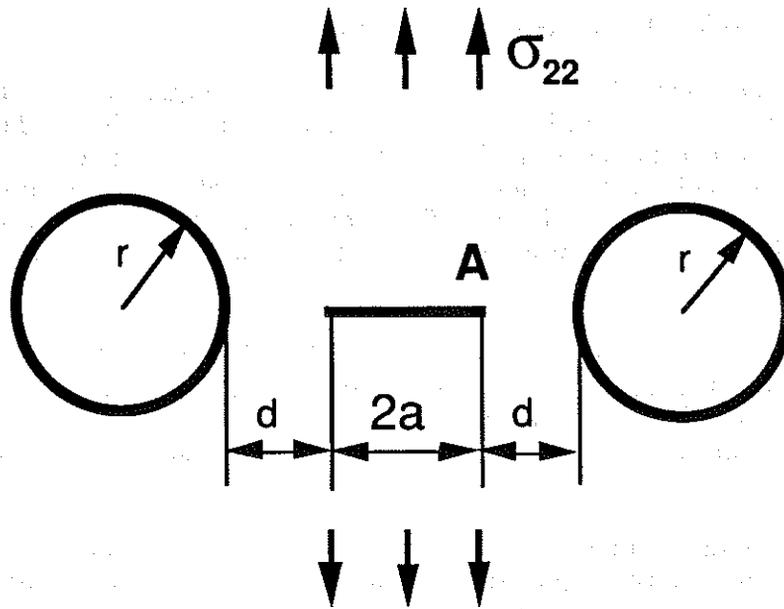


Figure 1. 35 : une fissure en interaction avec deux cavités circulaires placées symétriquement sur l'axe de la fissure, dans un milieu plan infini.

Y. Murakami ,(1988), " Stress intensity factors handbook " , Pergamon Press

$$\sigma_{22} = -1$$

géométrie		valeurs de référence (précision 1%)	résultats par superposition	écart
a/r	d/r	K_{IA}	K_{IA}	(%)
0,8	0,2	3,33	3,3	1,0
2	0,25	2,48	2,47	0,5
1	0,5	2,59	2,64	1,9

1. 13. QUALITE DES SOLUTIONS OBTENUES

On peut améliorer la solution du problème élastique soit en travaillant à un ordre plus élevé, soit en utilisant plus d'éléments de frontière. Une discrétisation plus fine aux extrémités tend à diminuer les effets des coins. Les déplacements intégrant les déformations sur toute la structure, ils reflètent mal les écarts sur les conditions aux limites (figure 1. 29). On propose ici un indicateur de qualité basé sur les contraintes pour montrer qu'en effet l'utilisation d'ordres élevés améliore la solution.

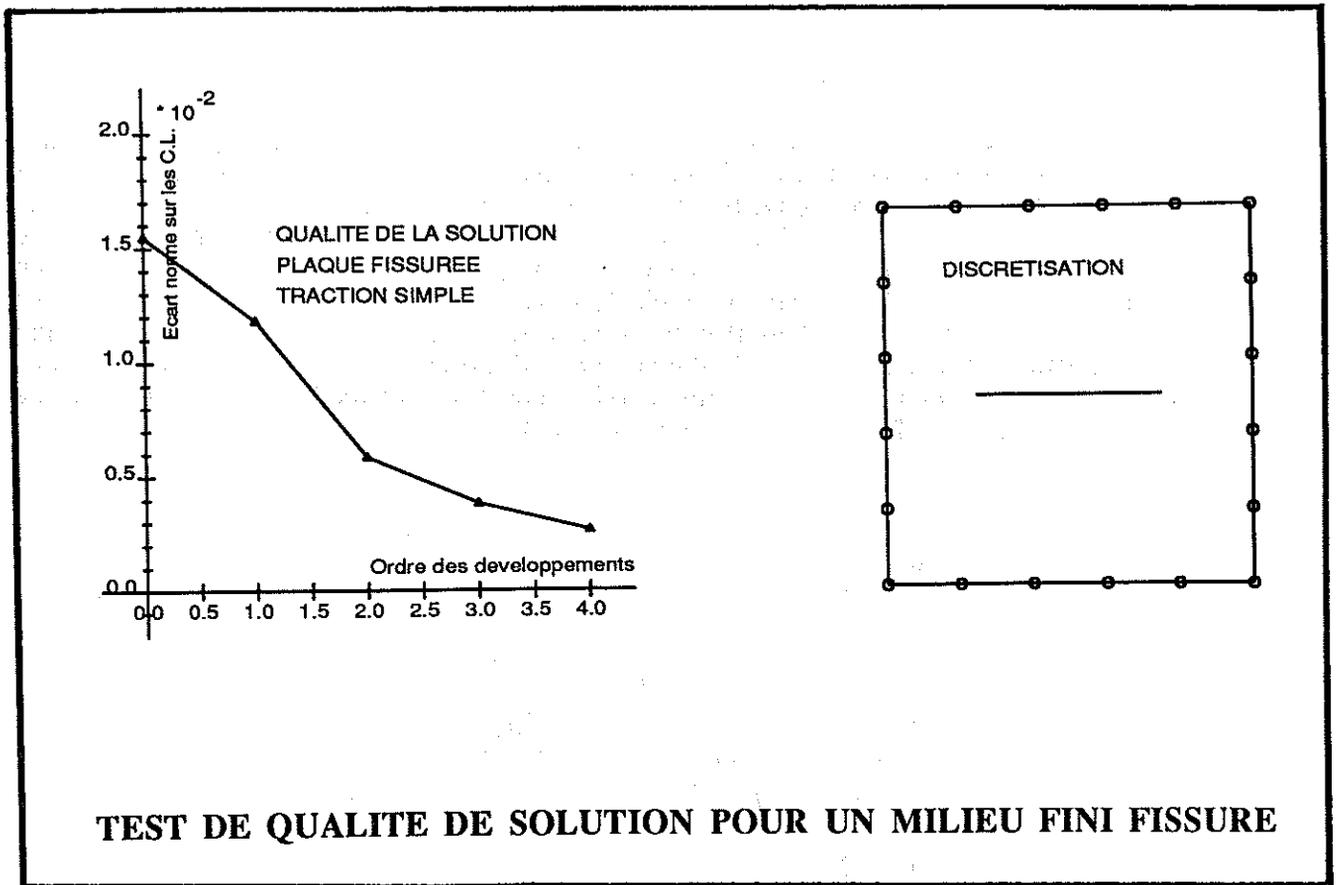
Les champs de contraintes et déplacements construits à partir de la solution obtenue constituent la solution exacte pour les conditions aux limites ainsi construites. La qualité de la solution peut être évaluée par la différence entre les conditions aux limites désirées et celles construites avec les pressions fictives sur les éléments.

Le choix d'une norme permettra de quantifier la qualité de la solution. On peut proposer une norme qui reflète la présence des plus grands écarts de contrainte. Par exemple on peut définir une intégrale sur les contours (fissures, bords, pores) :

$$Q = \frac{\int_{\text{contours}} (\sigma_n^c - \sigma_n^i)^2 + (\sigma_t^c - \sigma_t^i)^2 ds}{\int_{\text{contours}} (\sigma_n^i)^2 + (\sigma_t^i)^2 ds} \quad (1. 13. 1.)$$

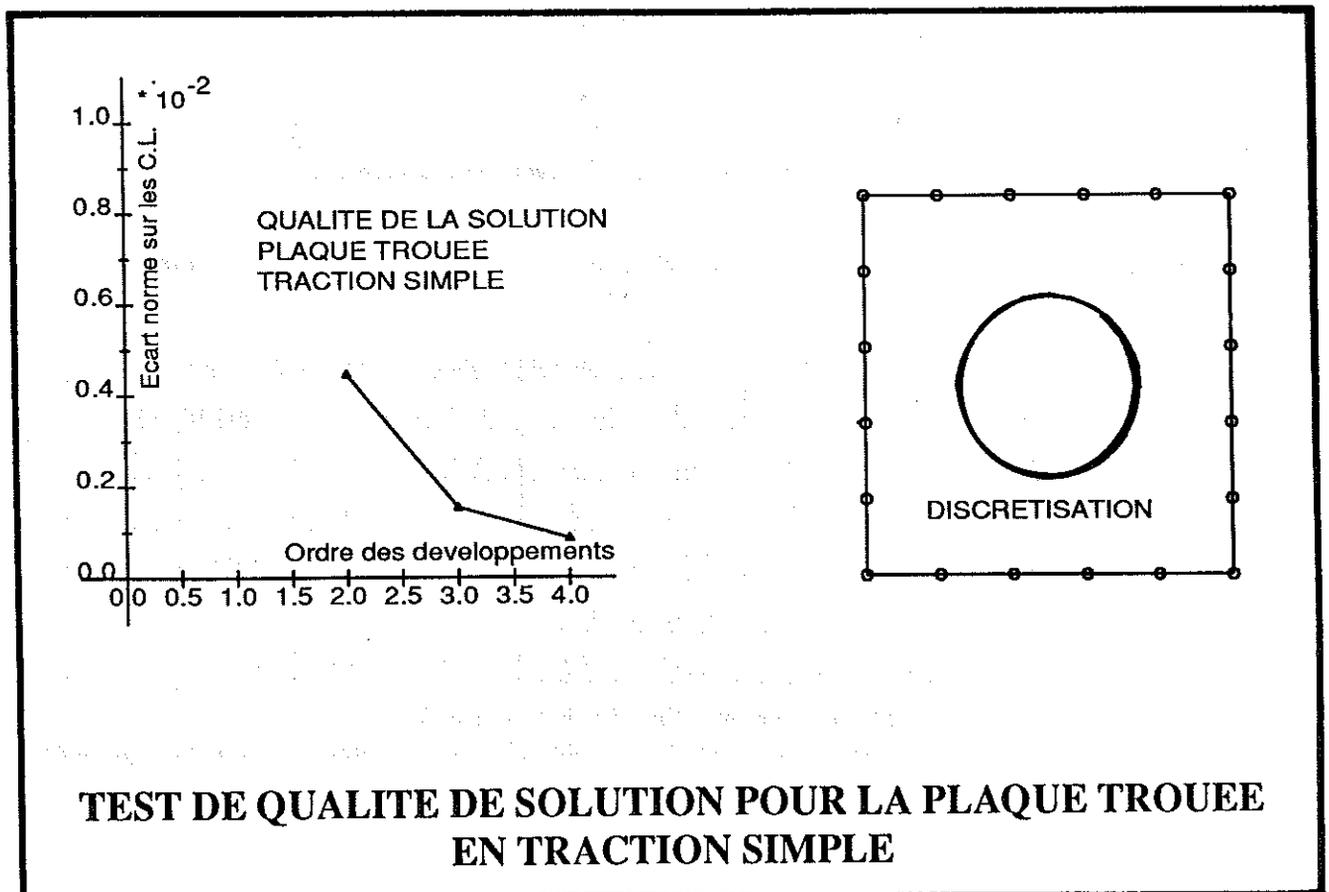
L'indice identifie la contrainte normale ou tangentielle à la frontière et l'exposant identifie la contrainte imposée désirée ou construite à partir de la solution.

Les figures 1. 36 et 1. 37 illustrent la qualité des conditions aux limites reconstruites sur une plaque en traction simple.



TEST DE QUALITE DE SOLUTION POUR UN MILIEU FINI FISSURE

Figure 1. 36 : amélioration de la solution par les ordres élevés (fissure).



TEST DE QUALITE DE SOLUTION POUR LA PLAQUE TROUEE EN TRACTION SIMPLE

Figure 1. 37 : amélioration de la solution par les ordres élevés (cavité).

ANNEXES

A1. 1. COMPARAISON AVEC D'AUTRES METHODES

Les figures A1. 1. 2 et A1. 1. 3 mettent en comparaison les résultats obtenus par éléments finis, équations intégrales aux frontières et superposition. Le maillage utilisé pour les éléments finis (éléments triangulaires à 3 noeuds) est celui de la figure A1. 1. 3. Pour les deux autres techniques, le contour extérieur de la plaque est décrit par quatre segments de longueurs identiques. La géométrie du trou est décrite pour les équations intégrales par 18 segments de droite de même longueur. Le logiciel d'équations intégrales aux frontières utilise une approximation linéaire des déplacements évalués sur les contours. Les développements jusqu'à l'ordre 2 ont servi pour les calculs par la méthode de superposition. Le coefficient de Poisson vaut 0,3.

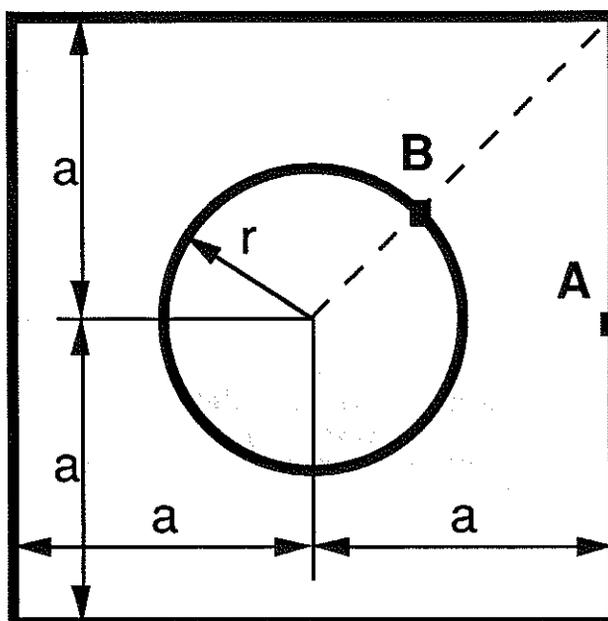


Figure A1. 1. 1 : une cavité circulaire centrée dans une plaque carrée.

R. E. Peterson, (1974), " Stress concentration factors " , John Wiley & Sons.

géométrie	F. E. M.		B. E. M.		R. E. Peterson		superposition	
	C_A	C_B	C_A	C_B	C_A	C_B	C_A	C_B
1,493	2,4	2,75	2,43	2,81	2,42	2,42	2,5	2,94
2	1,0	1,64	0,97	1,72	1,0	1,6	1,02	1,75
2,5	0,575	1,36	0,56	1,39	0,55	1,25	0,58	1,41
5	0,12	0,93	0,124	1,075	0,03	1,01	0,13	1,08

F. E. M. : méthode des éléments finis (logiciel Castem).

B. E. M. : méthode des équations intégrales aux frontières (logiciel proposé en référence par [BREBBIA 84].

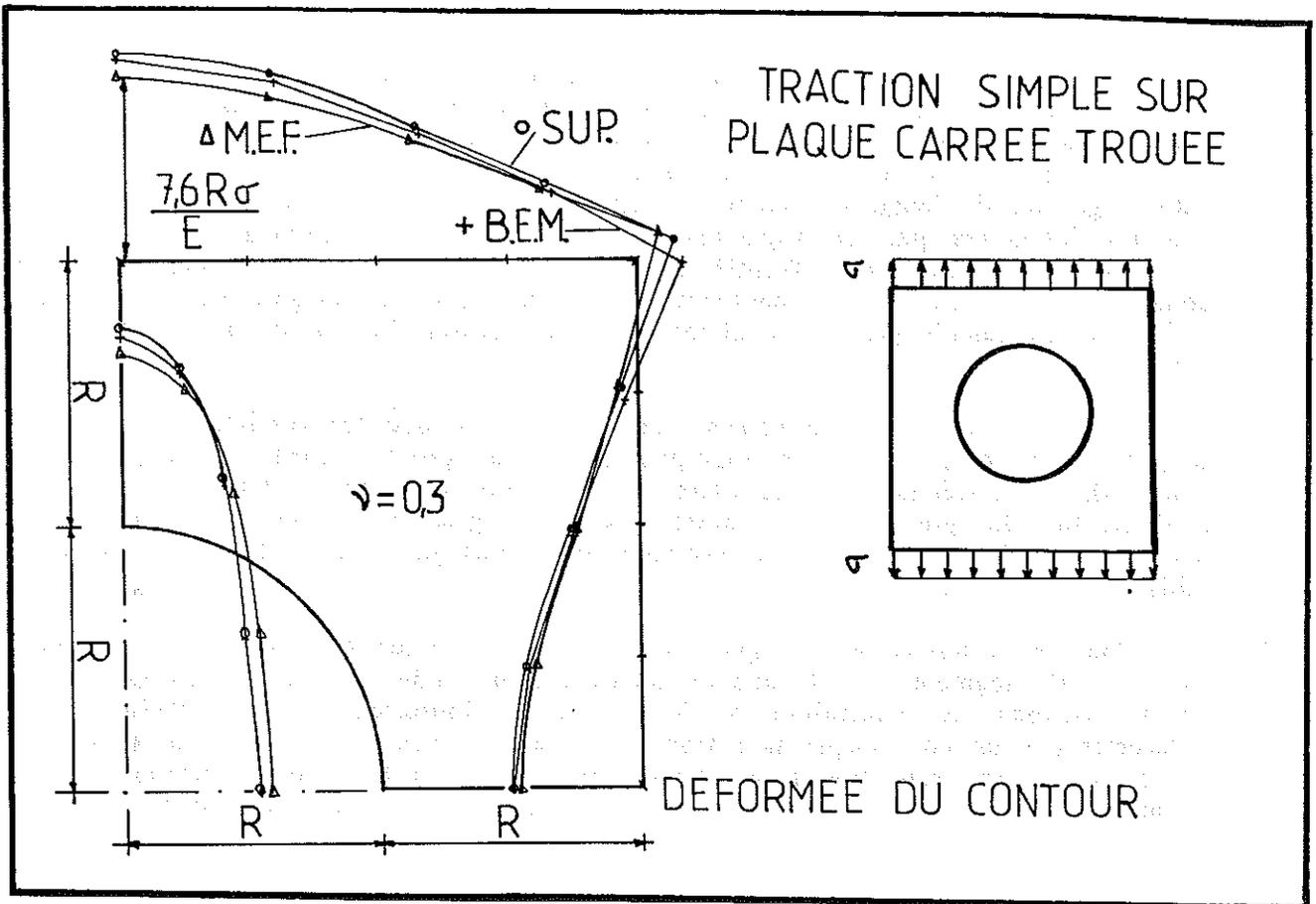


Figure A1. 1. 2

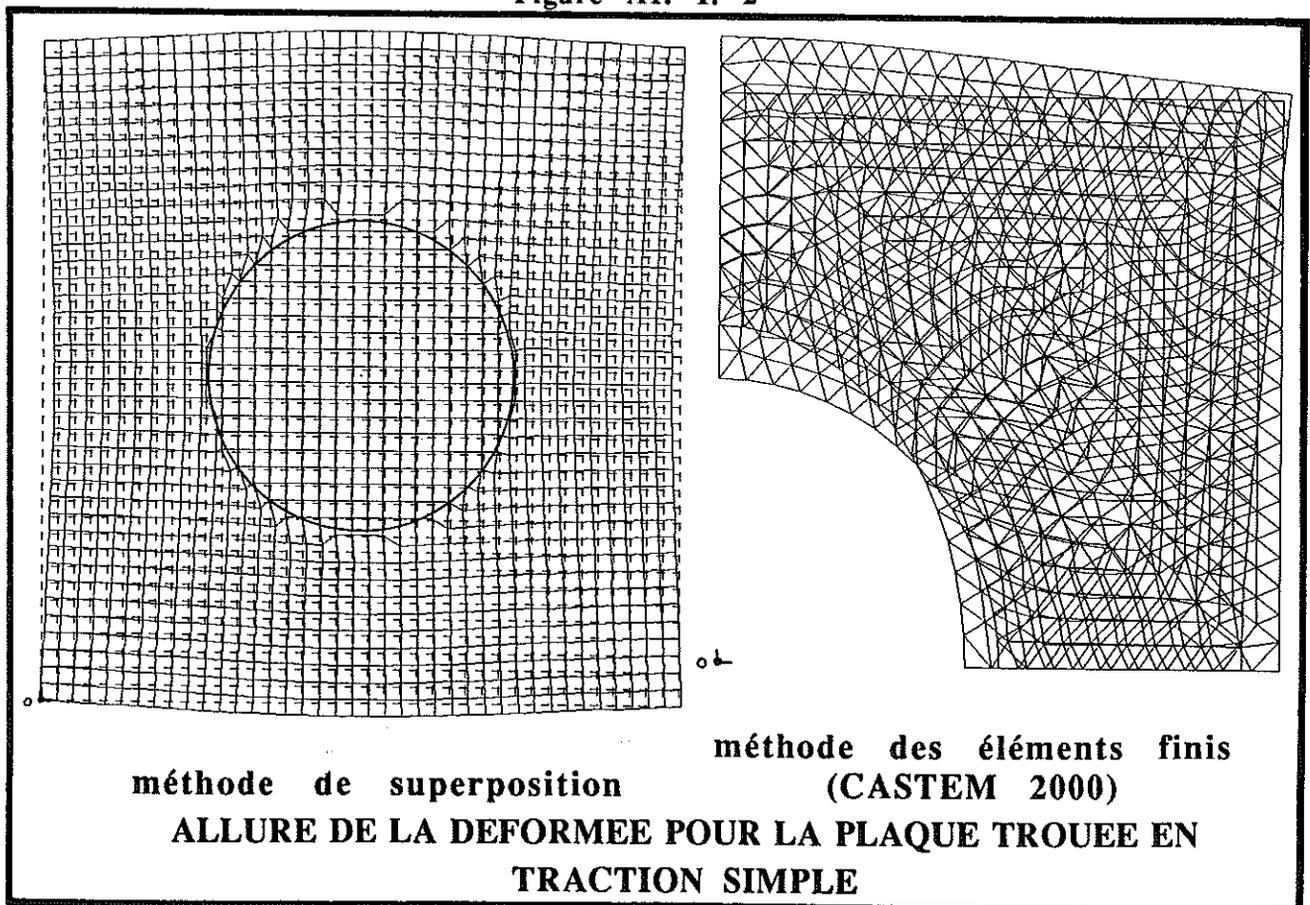


Figure A1. 1. 3

La figure A1. 1. 2 compare les résultats obtenus par éléments finis, équations intégrales aux frontières et superposition. Le maillage utilisé pour les éléments finis (éléments triangulaires à 3 noeuds) est celui de la figure A1. 1. 3 Pour les deux autres techniques, le contour extérieur de la plaque est décrit par quatre segments de longueurs identiques. La géométrie du trou est décrite pour les équations intégrales par 18 segments de droite de même longueur. Le logiciel d'équations intégrales aux frontières utilise une approximation linéaire des déplacements évalués sur les contours. Les développements jusqu'à l'ordre 2 ont servi pour les calculs par la méthode de superposition. Le coefficient de Poisson vaut 0,3.

Il est naturel, et on le constate sur les figures, que les résultats d'équations intégrales aux frontières et de superposition soient proches (deux techniques de frontières). La différence des résultats par éléments finis est certainement due à la difficulté de prendre en compte les forts gradients dans les zones de concentration de contrainte en absence de maillage adapté (raffinement de maillage par exemple).

Pour les résultats de la figure A1. 1. 3 la technique de superposition a fait intervenir 20 segments de longueurs identiques par côté et des développements des répartitions de contrainte à l'ordre 4. A l'intérieur de la cavité, les déplacements pour une plaque non trouée ont été injectés aux noeuds du maillage utilisé pour la représentation graphique. On constate que partout, les déplacements calculés sont cohérents avec les résultats par éléments finis.

A1. 2. UTILISATION DE LA METHODE POUR DES CALCULS EN ELASTICITE LINEAIRE

Les éprouvettes ATP (figure A1. 2. 1) ont été réalisées pour étudier l'influence de défauts contrôlés introduits dans des éprouvettes de mortier sollicitées en flexion 4 points [BREYSSE 92]. Les calculs que nous avons réalisés constituent une première étape d'une comparaison systématique entre les résultats expérimentaux et nos résultats.

Les calculs menant aux résultats des figures A1. 2. 1 et A1. 2. 2 ont été menés à l'ordre 4 et 100 points ont servis pour les intégrations. La charge est appliquée uniformément sur des segments de 1mm. Malgré une discrétisation grossière et l'absence d'éléments coins les conditions aux limites imposées sont bien respectées.

On retrouve bien sur différentes courbes les effets des appuis (segment CD de la figure A1. 2. 2), les effets des interactions entre les pores (segment AB de la figure A1. 2. 1). La figure A1. 2. 2 permet de constater que le terme de contrainte tangentielle qui permet d'apprécier l'erreur commise reste faible (10^{-3}) et est d'un ordre supérieur à celui du calcul.

EPROUVETTE ATP SERIE A2

CHARGES APPLIQUEES
SUR 1mm : 1 MPa

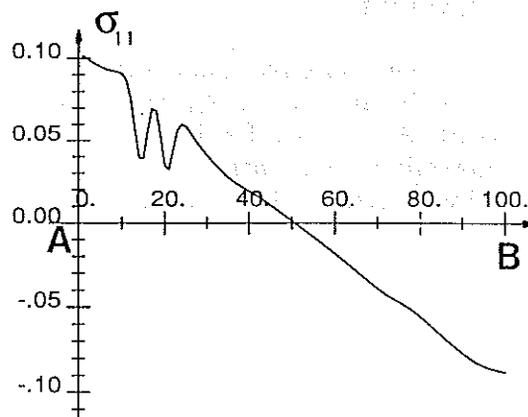
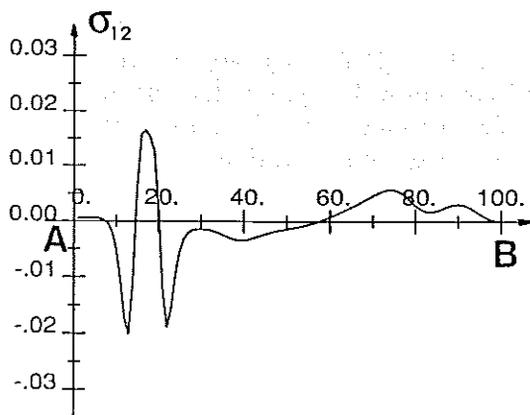
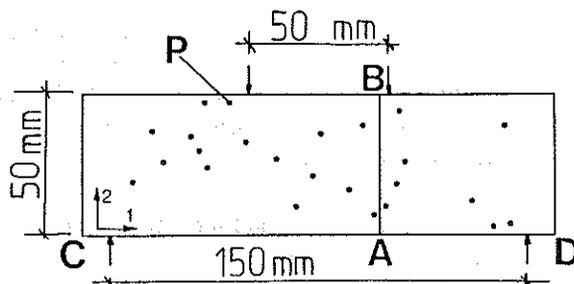


Figure A1. 2. 1

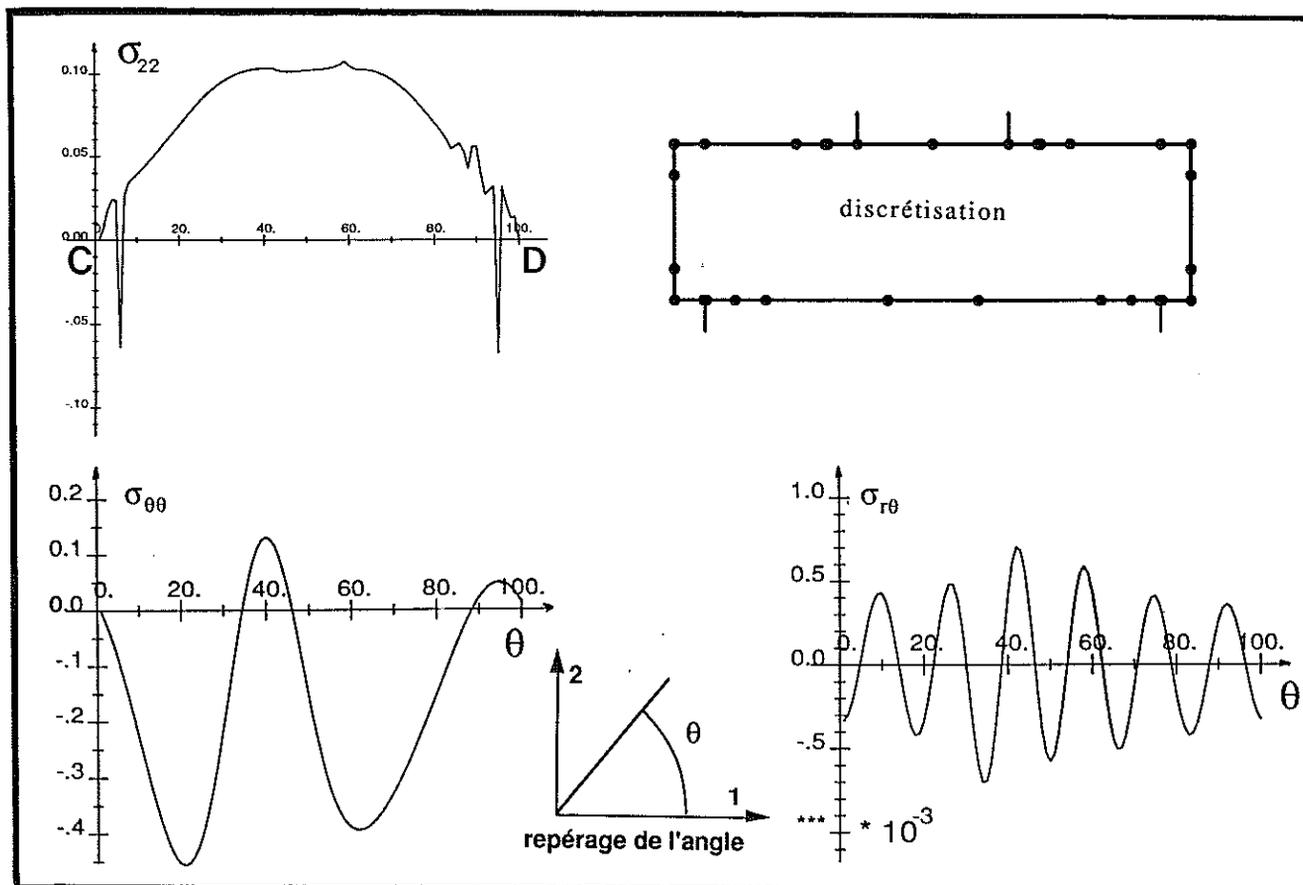


Figure A1. 2. 2

**PRISE EN COMPTE DU
FROTTEMENT**

2. PRISE EN COMPTE DU FROTTEMENT

Les fissures rencontrées dans les matériaux fragiles proviennent en général des auto-contraintes dues à l'élaboration. On constate que les fissures préexistantes dans les matériaux sont presque toujours ouvertes. Il existe néanmoins des états de compression pour lesquels ces fissures vont se refermer et le contact entre les lèvres de fissures va réduire le fonctionnement des fissures fermées en mode II [ANDRIEUX 83].

Lors des ruptures en compression, on observe pour les bétons ou les grès une fissuration en mode I dans l'axe de chargement. Afin de comprendre l'apparition de ce mode [NEMAT-NASSER 82] [HALLAM 86], que l'on peut supposer initié par des fissures fonctionnant en mode II, il convient d'évaluer correctement l'effet de chaque mode et du contact entre les lèvres des fissures fermées.

Nous adoptons ici un modèle de frottement de Coulomb pour la prise en compte du contact entre les lèvres de fissures. Pour les cas de chargements radiaux, aucune non linéarité n'est causée par le frottement. En effet l'effort de frottement étant proportionnel à l'effort de compression, lui-même proportionnel au chargement, le milieu a une réponse linéaire. Pour les chargements non radiaux il conviendra de prendre en compte l'histoire du chargement car la réponse du milieu pourra être non linéaire.

2. 1. CONFIGURATIONS ENVISAGEES

Le modèle de Coulomb peut être introduit de façon naturelle dans la méthode décrite ci-dessus, sous réserve toutefois de faire deux hypothèses simplificatrices :

1 - les fissures partiellement fermées seront considérées totalement fermées ou totalement ouvertes.

2 - les fissures partiellement bloquées seront considérées totalement bloquées ou en glissement sur toute la longueur de fissure.

Ainsi, une fissure n'a que 3 états possibles : ouvert, en glissement ou bloqué.

Sous chargement uniforme et en l'absence de fortes interactions, le cas de la fissure partiellement fermée est réduit au cas où la contrainte normale sur la fissure est voisine de zéro. En conséquence, l'influence de la première hypothèse sur la précision des calculs sera faible (à l'exclusion des cas de flexions et d'auto-contraintes...).

Deux hypothèses supplémentaires sont faites par souci de simplification, mais n'ont aucun caractère limitatif :

- le coefficient de frottement lèvre sur lèvre de fissure est constant sur toute la longueur de la fissure,

- le seuil d'adhérence est égal au seuil de frottement.

2. 2. IMPLANTATION DU MODELE DE COULOMB - CAS DU CHARGEMENT RADIAL

On notera ϕ le coefficient de frottement. Les efforts agissant sur une fissure sont décrits par des polynômes. Si $\sigma(x)$ est la contrainte normale aux lèvres de la fissure à l'abscisse x et $\tau(x)$ l'effort tangentiel, on peut calculer la valeur du frottement mobilisable $f_{mob}(x)$:

$$f_{mob}(x) = -\phi \sigma(x) \quad (2. 2. 1)$$

Ceci est valable lorsque la fissure est fermée. La valeur de $\sigma(x)$ et $\tau(x)$ résultent du chargement extérieur et des interactions.

Nous allons calculer la contrainte de cisaillement effective appliquée au matériau compte tenu du frottement.

Cas n° 1 : $|\tau(x)| < f_{mob}(x)$: alors la fissure ne peut pas travailler en mode II puisque le frottement la bloque. La contrainte effective $\tau_{eff}(x)$ de cisaillement sur la fissure vaut :

$$\tau_{eff}(x) = 0$$

et l'effort de frottement lèvre sur lèvre $f_{frot}(x)$ vaut :

$$f_{frot}(x) = \tau(x)$$

Cas n°2 : $|\tau(x)| > f_{mob}(x)$: alors la contrainte effective de cisaillement sur la fissure $\tau_{eff}(x)$ vaut :

$$\tau_{eff}(x) = [|\tau(x)| - f_{mob}(x)] * \text{signe}(\tau(x))$$

$$\text{avec } f_{frot}(x) = -f_{mob}(x) * \text{signe}(\tau(x))$$

de façon générale l'effort de frottement lèvre sur lèvre $f_{frot}(x)$ vaut :

$$f_{frot}(x) = \tau_{eff}(x) - \tau(x) \quad (2. 2. 2)$$

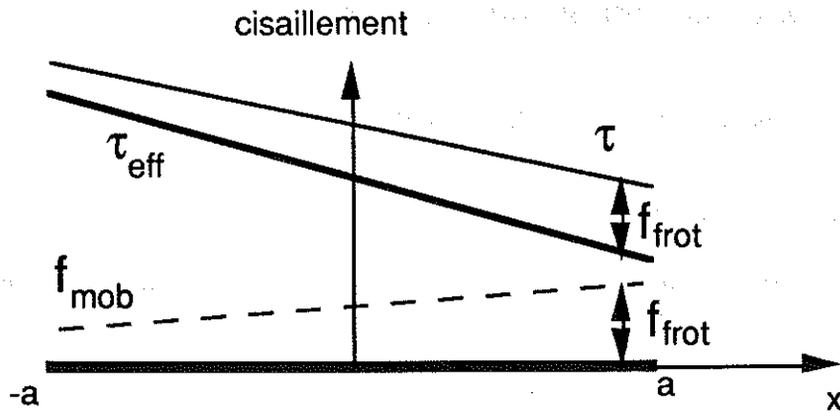


Figure 2. 1 : exemple pour des fonctions approximées à l'ordre 1

Seuil d'adhérence :

Le test adopté pour savoir si la fissure est bloquée ou permet du glissement est le suivant : l'écriture symbolique moy ($f(x)$) signifie moyenne sur toute la longueur de la fissure des valeurs de $f(x)$. On nomme C une constante qui vaut 1 si le seuil d'adhérence est égal au seuil de frottement.

Si $C * \text{moy} (f_{\text{mob}}(x)) \geq \text{moy} (\tau(x))$ alors la fissure est bloquée.

Si $C * \text{moy} (f_{\text{mob}}(x)) < \text{moy} (\tau(x))$ il y a mouvement relatif des deux lèvres.

De cette façon, on ne traite pas le problème de la fissure partiellement bloquée. On peut commettre l'erreur de considérer la fissure bloquée lorsqu'elle est en glissement total ou partiel ou inversement. Si l'on ne se situe pas dans ce cas limite (mouvements relatifs des deux lèvres nuls ou non nuls sur toute la longueur de la fissure), le problème est résolu avec rigueur. En fait, ces cas limites n'existent que pour des sollicitations faibles ou qui font intervenir des chargements du type "moments fléchissants".

2. 3. CALCUL DES EFFORTS DE FROTTEMENT

Pour prendre en compte le frottement il faut accéder à deux informations :

- quelles sont les fissures ouvertes et fermées, bloquées ou non ?
- quelle est la valeur de l'effort de frottement appliqué dans chaque fissure ?

Pour ce faire, l'effort de frottement est considéré comme un effort extérieur inconnu. Dans le cas général, il n'est pas possible d'obtenir cette valeur sans convergence. On écrira donc :

$$\vec{S}_i(x_i) + \vec{F}_i(x_i) = \sum_{j=1}^{N_f} \mathcal{F}_{ij} (\vec{D}_j(x_j)) \quad (2. 3. 1)$$

où $\vec{F}_i(x_i)$ représente l'effort de frottement. Ses composantes relatives à la contrainte normale sont toujours nulles. Après projection sur la base choisie, on obtient un système linéaire du type (1.5.9.) :

$$\left[\begin{matrix} \mathbf{F}_{ij} \end{matrix} \right] \vec{D} = \vec{S} + \vec{F} \quad (2. 3. 2)$$

cas général :

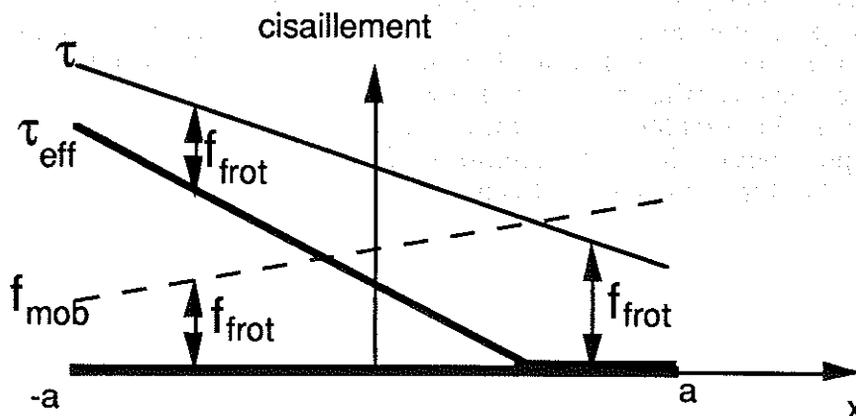


Figure 2. 2 : exemple pour des fonctions approximées à l'ordre 1

En général une résolution sans convergence est impossible car $f_{frot}(x)$ n'est pas une fonction linéaire de $f_{mob}(x)$ donc pas une fonction linéaire de $\sigma(x)$. La figure précédente illustre le seuil imposé par le frottement mobilisable.

Le système (2. 3. 2) sera résolu par itérations. Au cours des itérations la matrice est actualisée ainsi que le vecteur de frottement.

Evolution de la matrice - effets unilatéraux :

La matrice $[F_{ij}]$ évolue avec les conditions unilatérales de contact pour ne prendre en compte que les interactions effectives. Une fissure peut se trouver dans trois états possibles :

- état " 0 " : la fissure est fermée et bloquée. Aucune équation relative à cette fissure ne doit apparaître dans le système à inverser. Si on supprime brutalement les équations relatives à cette fissure, le système risque d'osciller entre des solutions non acceptables. En effet, ce changement de "géométrie de fissuration" peut occasionner des changements d'états des fissures voisines, états qui ne sont pas ceux de la solution finale. Pour éviter ce problème, nous faisons progressivement tendre vers zéro les coefficients d'influence (à l'exception du terme diagonal) de cette fissure dans la matrice $[F_{ij}]$; ils seront multipliés à chaque itération par une valeur arbitraire V_c inférieure à 1. V_c fixe la vitesse de convergence. Si, en cours de convergence, la fissure se "débloque", alors ces coefficients sont réintégrés progressivement dans la matrice de façon inverse en les divisant par V_c .

- état " 1 " : la fissure est fermée mais non bloquée. Les équations relatives aux interactions avec cette fissure ne concernent que l'aspect tangentiel. Les coefficients d'influence de l'ouverture de cette fissure dans la matrice $[F_{ij}]$ vont progressivement tendre vers 0 au cours de la convergence, (à l'exception du terme diagonal unité). Ils seront multipliés à chaque itération par V_c . Si en cours de convergence la fissure "s'ouvre", alors ces coefficients sont soumis au même traitement que dans le cas précédent.

- état " 2 " : la fissure est ouverte. Les équations relatives à cette fissure font intervenir les interactions des efforts normaux et tangentiels de façon classique. Les composantes du vecteur \vec{F} relatives à cette fissure sont nulles. Si la fissure se ferme ou se bloque en cours de convergence, on procède comme dans le cas précédent.

Cette technique de convergence avec progression des coefficients d'influence permet d'évoluer de façon continue vers la solution. On a pu constater qu'elle ne fait défaut que dans certains cas ne concordant pas avec les hypothèses 1 et 2 sur la non partition de la fissure en deux états simultanés (glissement/blocage, ouverture/glissement, ouverture/blocage). Des essais effectués avec $V_c = 0$ ont fait apparaître une possibilité de passage d'une valeur à une autre se trouvant sur des chemins de convergence différents. Dans la pratique, 4 à 5 itérations suffisent avec $V_c = 0,1$.

Evolution du vecteur de frottement :

Comme l'effort de compression sur les fissures fermées résulte des interactions, on actualise à chaque itération les composantes du vecteur de frottement suivant le modèle proposé.

Arrêt des itérations :

Le calcul est itératif et converge vers la valeur du vecteur inconnu de frottement \vec{F} . Pour la première itération \vec{F} est le vecteur nul, pour les suivantes il est actualisé à la nouvelle valeur calculée jusqu'à ce que l'écart entre deux solutions successives \vec{D}_h et \vec{D}_{h-1} soit considéré négligeable. On norme une constante P à l'aide des valeurs de problème :

$$P = \frac{\text{sup (valeurs absolues des composantes de } \vec{S})}{B}$$

où B est une constante arbitraire qui fixe la précision des calculs (pour une précision de 10^{-4} , on prendra $B=10^4$; c'est la valeur utilisée pour nos applications).

Pour deux itérations successives h et h+1, on décide d'arrêter le calcul lorsque toutes les composantes d de D telles que $d_h > P$ (*) respectent :

$$\frac{d_{h+1} - d_h}{d_h} < P \quad (2. 3. 3)$$

(*) pour des raisons purement numériques quand $d_h < P$ on considère que $d_h = 0$.

La prise en compte d'un état d'ouverture initial peut se faire de façon quasi-immédiate.

2. 4. POSSIBILITE DE RESOLUTION SANS CONVERGENCE

La figure du paragraphe 2. 2. illustre un cas (à l'ordre 1) où une résolution sans convergence est possible, car $f_{\text{frot}}(x)$ est dans ce cas une fonction linéaire de $f_{\text{mob}}(x)$ donc une fonction linéaire de $\sigma(x)$:

$$f_{\text{frot}}(x) = - f_{\text{mob}}(x) * \text{signe}(\tau(x)) = \varphi \sigma(x) * \text{signe}(\tau(x))$$

On construit à partir de cette relation une matrice $[A_{ji}]$ telle que :

$$F_i = A_{ji} D_j$$

$$\text{d'où } [F_{ji} - A_{ji}] D = S \quad (2. 4. 1)$$

En pratique on remplacera le coefficient $\alpha(i,2,n,j,k,l)$ de $[F_{ji}]$ par $\alpha(i,2,n,j,k,l) \pm \varphi \alpha(i,1,n,j,k,l)$ suivant le signe de $\tau(x)$.

Un calcul préliminaire et une vérification à posteriori du signe de $\tau(x)$ (de la relation entre contrainte normale et frottement) sont néanmoins indispensables.

2. 5. HISTOIRE DU CHARGEMENT

2. 5. 1. EVOLUTION DES EFFORTS SUR LES FISSURES

La prise en compte du frottement fait intervenir l'histoire du chargement. Une fissure comprimée puis cisailée se déforme moins (si il y a du frottement) que si elle est cisailée puis comprimée. Elle peut aussi être bloquée dans l'état déformé ou initial.

On procédera par incréments de charge. Les fissures étant considérées entièrement ouvertes, fermées ou bloquées, la transition d'un état à l'autre sera d'autant plus mal évaluée que le chargement sur la fissure sera loin de l'uniformité (ordre 0) ou que les incréments de charges seront grands.

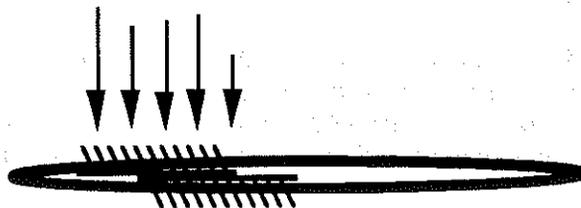


Figure 2. 3 : répartition de contrainte variable sur une fissure.

Les efforts de frottement évoluent en fonction du chargement normal et tangentiel sur une fissure. Toutes ces évolutions sont gérées par le logiciel: **incrément de charge**, **incrément de frottement mobilisable**, **incrément de frottement**. Les résultats des calculs avec interactions sont mémorisés et cumulés à chaque étape.

Le schéma de principe est donné par les figures 2. 3, 2. 4 et 2. 5. Si la résultante de l'effort de frottement est supérieure à la résultante de l'effort agissant alors la fissure est bloquée. Lorsque la fissure s'ouvre l'incrément de frottement est la valeur de l'effort total de frottement du pas de chargement précédent.

L'incrément de frottement est la différence entre le frottement du pas de chargement précédent et le nouveau frottement mobilisable. Celui-ci est évalué à l'aide des répartitions de la contrainte de compression sur la fissure.

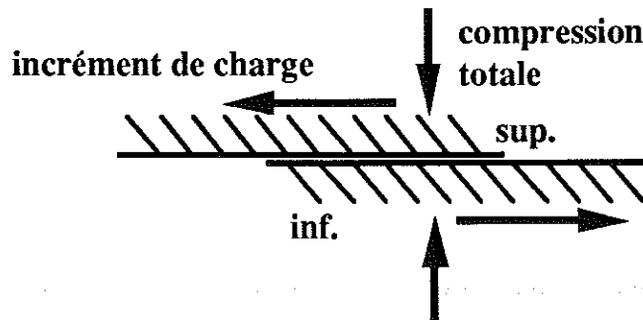


Figure 2. 4 : schéma de principe du calcul.

L'incrément de frottement est la différence entre le frottement du pas de chargement précédent et le nouveau frottement mobilisable. Celui-ci est évalué à l'aide des répartitions de la contrainte de compression sur la fissure.

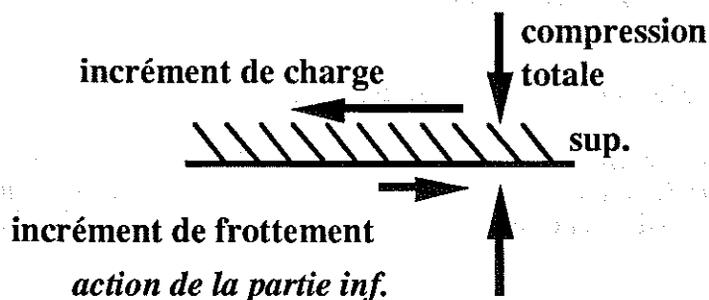


Figure 2. 5 : action d'une lèvres de fissure sur sa "soeur".

2. 5. 2. TECHNIQUE DE CALCUL INCREMENTALE

La résolution des systèmes utilise utilise la même technique de convergence qu'en 2. 3. Cependant, au lieu de résoudre une seule fois le système comme dans le cas du chargement radial, on procède par incréments de chargement afin de cerner au mieux les changements d'états des fissures dans le milieu. Pour réduire les erreurs de calculs liées aux changements d'états (considérer l'effet du mode II lorsqu'une fissure est bloquée par exemple), il faut que ces changements d'états interviennent entre deux incréments de chargement. La solution adoptée est la

plus simple mais aussi la plus coûteuse : les incréments sont suffisamment petits pour que les changements d'états soient suffisamment proches des incréments pour commettre une erreur négligeable.

Soient \vec{dS}_t le vecteur incrément de charge (sur les frontières extérieures du domaine), \vec{dF}_t le vecteur incrément de frottement et \vec{dF} le vecteur décrivant l'effort total de frottement pour l'instant de chargement t . Le vecteur correspondant aux pressions fictives totales est \vec{D}_t et son incrément est \vec{dD}_t .

Le système à résoudre est :

$$[\mathbb{F}_{ij}]_t \vec{dD}_t = \vec{dS}_t + \vec{dF}_t \quad (2.5.1)$$

avec :

$$\vec{D}_t = \vec{D}_{t-1} + \vec{dD}_t \quad (2.5.2)$$

Les pressions fictives totales \vec{D}_t ont deux aspects :

1 - la fissure i est par exemple ouverte et la pression fictive relative au mode I sur cette fissure est utilisée pour évaluer les effets de l'ouverture sur l'état de déformation du milieu.

2 - la fissure i est par exemple fermée et la pression fictive relative au mode I sur cette fissure n'a aucun effet sur l'état de déformation du milieu. La connaissance de l'effort de compression total (contenu dans \vec{D}_t) est tout de même nécessaire pour savoir si le mouvement en mode II est possible (après évaluation des incréments de frottement mobilisable et de frottement). Du fait de l'évolution de la matrice en fonctions des états des fissures, les pressions fictives relatives aux compressions sur les fissures n'interviennent pas dans le calcul des interactions.

Il en est de même pour les effets du mode II (\vec{D}_t contient les efforts tangentiels agissant sur les fissures pouvant déformer ou non le milieu).

Lorsqu'une fissure i s'ouvre le frottement total \vec{dF}_{t-1}^i de l'incrément précédent est rajouté à l'incrément de frottement afin d'améliorer la précision des calculs :

$$[\mathbb{F}_{ij}]_t \vec{dD}_t = \vec{dS}_t + \vec{dF}_t \quad \text{où } \vec{dF}_t \text{ contient } \vec{dF}_{t-1}^i$$

Ce type de comportement nécessite d'introduire un nombre de tests important dans l'algorithme de calcul notamment pour le cumul des pressions fictives incrémentales et il reste encore le cas de la fissure partiellement ouverte ou bloquée à prendre en compte... On comprendra donc que poursuivre le développement de la prise en compte de l'histoire du frottement nécessiterait des modifications importantes.

**CALCULS DES ENERGIES
ELASTIQUES ET DISSIPÉES**

3. CALCULS DES ENERGIES ELASTIQUES ET DISSIPÉES

3. 1. OBJECTIF

Pour déterminer les rigidités des structures, l'énergie élastique stockée ainsi que l'énergie dissipée doivent être connues même si l'on ne calcule pas le champ de déplacements de toute la structure. Afin d'obtenir cette rigidité de façon rapide avec la méthode de superposition exposée ici, on fournit plus loin l'expression du travail fourni par les efforts extérieurs obtenus à partir des pressions et des déplacements aux frontières internes de la structure.

Dans le cas de fissures seules, des contraintes imposées quelconques autorisent cette démarche. Cependant, la présence de pore(s) restreint cette démarche aux contraintes imposées uniformes car il faut connaître les déplacements induits sur un contour circulaire pour évaluer le travail d'efforts.

3. 2. CALCUL DES ENERGIES ELASTIQUES ET DISSIPÉES LIEES A LA PRESENCE DES FISSURES - CONDITIONS AUX LIMITES EN CONTRAINTES

Quel que soit le trajet de chargement, cette superposition est vraie.

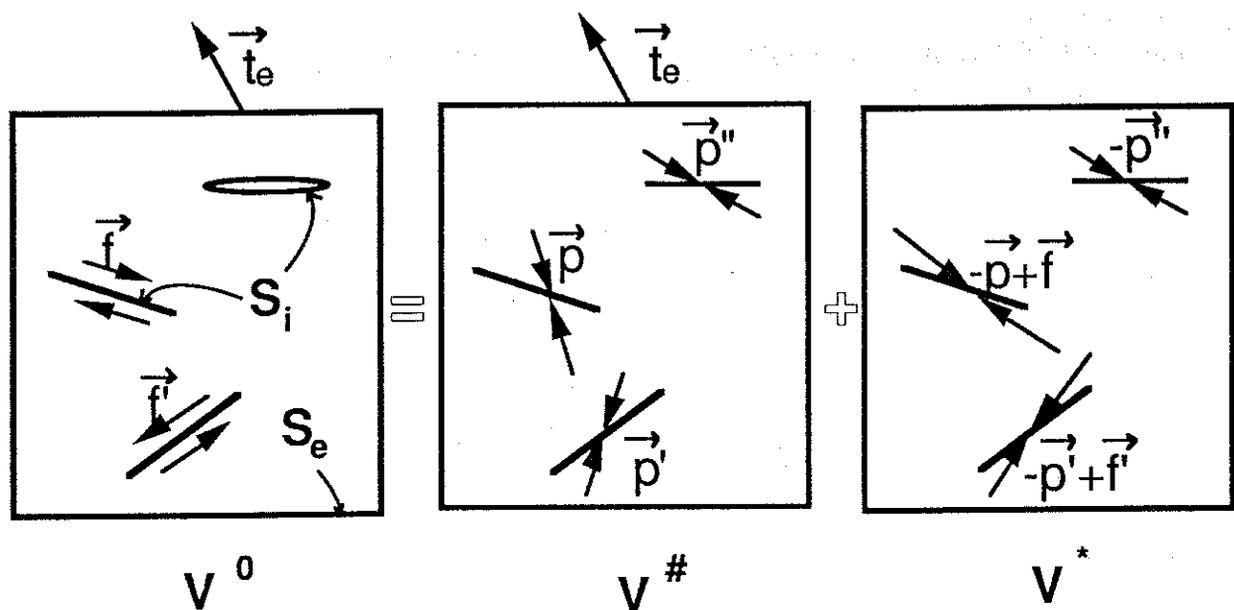


Figure 3. 1 : décomposition des problèmes pour des conditions aux limites en déplacements.

On impose des efforts \vec{t}_e à la frontière d'un domaine. Les déplacements \vec{u}_0 sur la frontière S_e n'étant pas calculés, est-il possible de connaître les énergies élastique et dissipée du problème par la seule connaissance des ouvertures de fissures ?

Définitions :

On note \vec{f} (ou $\vec{f}' \dots$) les efforts de frottement lèvres sur lèvres, \vec{t}_e les efforts extérieurs, $\vec{u}^0, \vec{u}^\#$ et \vec{u}^* les déplacements et $\vec{p}^0, \vec{p}^\#$ et \vec{p}^* les efforts respectifs des systèmes $V^0, V^\#$ et V^* . On a donc avec les notations du schéma : $\vec{p}^0 = \vec{t}_e$ sur la surface extérieure du domaine et $\vec{p}^0 = \vec{f}$ dans les fissures ; $\vec{p}^\# = \vec{t}_e$ sur la surface extérieure du domaine et $\vec{p}^\# = \vec{p}$ dans les fissures ; $\vec{p}^* = 0$ sur la surface extérieure du domaine et $\vec{p}^* = -\vec{p} + \vec{f}$ dans les fissures.

Les efforts $\vec{p}^\#$ sont appliqués sur les fissures dans le système $V^\#$ pour maintenir les lèvres des fissures fermées. Les ouvertures des fissures O_F sont calculées à partir des pressions fictives (vecteur \vec{D}).

Soient S_e la surface extérieure du domaine et S_i la surface des fissures. On peut, pour des sollicitations simples et des domaines simples connaître $\vec{u}^\#$ aisément. Par superposition :

$$\vec{u}^0 = \vec{u}^\# + \vec{u}^* \quad (3.2.1)$$

où \vec{u}^* est l'inconnue. L'énergie fournie au système est W_f , travail des efforts extérieurs \vec{t}_e dans \vec{u}^0 :

$$W_f = \frac{1}{2} \int_{S_e} \vec{t}_e \cdot \vec{u}^0 \, ds = \frac{1}{2} \int_{S_e} \vec{t}_e \cdot (\vec{u}^\# + \vec{u}^0) \, ds \quad (3.2.2)$$

D'après le principe de réciprocité :

$$\int_{S_e + S_i} \vec{u}^* \cdot \vec{p}^\# \, ds = \int_{S_e + S_i} \vec{u}^\# \cdot \vec{p}^* \, ds \quad (3.2.3)$$

Calculons le membre de droite :

$$\int_{S_e + S_i} \vec{p}^* \cdot \vec{u}^\# \, ds = \int_{S_i} \vec{p}^* \cdot 0 \, ds + \int_{S_e} 0 \cdot \vec{u}^\# \, ds = 0 \quad (3.2.4)$$

donc le membre de droite est nul. Le travail des pressions dans les fissures apparaît sur S_i :

$$\int_{S_e + S_i} \vec{p}^\# \cdot \vec{u}^* \, ds = \int_{S_e} \vec{u}^* \cdot \vec{t}_e \, ds + \int_{S_i} \vec{O}_F \cdot \vec{p}^\# \, ds = 0 \quad (3.2.5)$$

Faisons apparaître les efforts de frottement dans l'expression précédente :

$$\int_{S_e} \vec{u}^* \cdot \vec{t}_e \, ds = \int_{S_i} \vec{O}_F \cdot (-\vec{p}^\# + \vec{f}) \, ds + \int_{S_i} \vec{O}_F \cdot (-\vec{f}) \, ds$$

La conservation de l'énergie impose que le travail des efforts sur S_e et S_i soit égal à l'énergie de déformation W_{el} du domaine élastique linéaire:

$$\int_{S_e} \vec{u}^0 \cdot \vec{t}_e \, ds + \int_{S_i} \vec{O}_F \cdot \vec{f} \, ds = \int_V \vec{\sigma} \cdot \vec{\epsilon} \, dv \quad (3.2.6)$$

en utilisant l'expression (3.2.1) puis l'égalité (3.2.6) on aboutit à :

$$\begin{aligned} & \int_{S_e} (\vec{u}^\# + \vec{u}^*) \cdot \vec{t}_e \, ds + \int_{S_i} \vec{O}_F \cdot \vec{f} \, ds \\ &= \int_{S_e} \vec{u}^\# \cdot \vec{t}_e \, ds + \int_{S_i} \vec{O}_F \cdot (-\vec{p}^\# + \vec{f}) \, ds = 2 W_{el} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Soit W_{dis} l'énergie dissipée dans les fissures :

$$W_{dis} = - \int_{S_i} \vec{O}_F \cdot \vec{f} \, ds \quad (3.2.8)$$

Le supplément d'énergie élastique ΔW_{el} lié à la présence de fissures vaut donc :

$$\Delta W_{el} = \frac{1}{2} \int_{S_i} \vec{O}_F \cdot (-\vec{p}^\# + \vec{f}) \, ds$$

$$W_{el} = \frac{1}{2} \int_{S_e} \vec{u}^\# \cdot \vec{t}_e \, ds + \frac{1}{2} \int_{S_i} \vec{O}_F \cdot (-\vec{p}^\# + \vec{f}) \, ds \quad (3.2.9)$$

$$W_f = W_{el} + W_{dis} \quad (3.2.10)$$

L'énergie fournie au système W_f est répartie en une énergie élastique W_{el} et une énergie dissipée W_{dis} qui peuvent être évaluées sans connaître les déplacements à la frontière du domaine.

Ainsi, connaissant les expressions de O_F , de p et f en fonction des coefficients $d(i,m,n)$ et $f(i,m,n)$ on peut très rapidement calculer les termes W_f , W_{el} et W_{dis} . En effet, on connaît les valeurs de :

$$\omega_{n\ell} = \frac{E}{a^2} \int_{-a}^a L(\ell, x) O_F(n, \frac{x}{a}) dx \quad (3. 2. 11)$$

on a par réciprocité $\omega_{n\ell} = \omega_{\ell n}$. Pour n et ℓ de 0 à 4, les valeurs sont :

$$\begin{array}{lll} \omega_{00} = 2 \Pi & \omega_{02} = \frac{\Pi}{4} & \omega_{04} = \frac{\Pi}{32} \\ \omega_{11} = \frac{\Pi}{4} & \omega_{13} = \frac{\Pi}{16} & \omega_{33} = \frac{33 \Pi}{512} \\ \omega_{22} = \frac{\Pi}{8} & \omega_{24} = \frac{13\Pi}{512} & \omega_{44} = \frac{81\Pi}{2048} \end{array}$$

les autres $\omega_{n\ell}$ sont nuls. On a donc, par exemple pour W_{dis} dans le fissure i :

$$W_{dis} = \frac{a^2}{2E} \left(\sum_{n=0}^P \sum_{\ell=0}^P \omega_{n\ell} d(i,2,n) f(i,\ell) \right)$$

et pour ΔW_{el} dans le fissure i :

$$\Delta W_{el} = \frac{a^2}{2E} \left(\sum_{m=1}^2 \sum_{n=0}^P \sum_{\ell=0}^P \omega_{n\ell} d(i,m,n) s(i,m,\ell) \right) \quad (3. 2. 12)$$

3. 3. CALCUL DES ENERGIES ELASTIQUES ET DISSIPÉES LIÉES A LA PRESENCE DES FISSURES - CONDITIONS AUX LIMITES EN DEPLACEMENT

De la même façon que précédemment on pourra établir la partition de l'énergie fournie au système dès que l'on saura résoudre le "problème *" où les frontières sont bloquées en déplacement. On suppose le "problème #" suffisamment simple pour que les contraintes et déplacements y soient aisément connus (traction simple, cisaillement simple...). Les inconnues sont dans ce cas les \vec{t}_e du "problème 0".

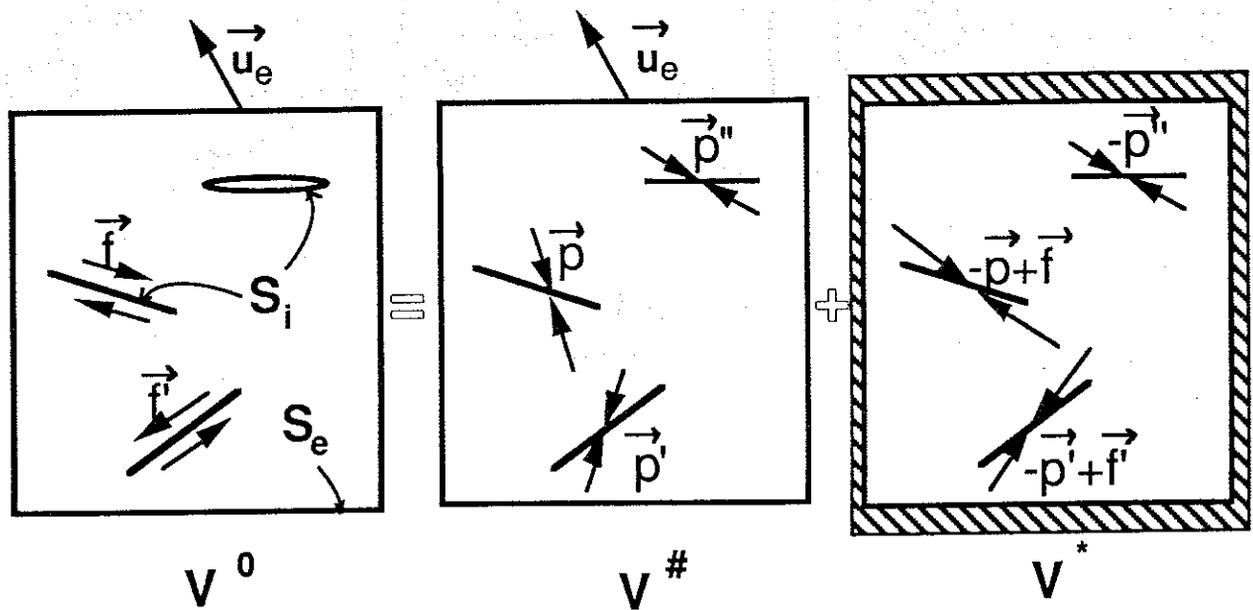


Figure 3. 2 : décomposition des problèmes pour des conditions aux limites en déplacements.

On obtient donc ainsi de façon analogue au chapitre 3. 2. :

$$W_{\text{dis}} = - \int_{S_i} \vec{Q}_F \cdot \vec{f} \, ds \quad (3. 3. 1)$$

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \int_{S_e} \vec{t}^{\#} \cdot \vec{u}_e \, ds - \frac{1}{2} \int_{S_i} \vec{Q}_F \cdot (-\vec{p}^{\#} + \vec{f}) \, ds \quad (3. 3. 2)$$

3. 4. CALCUL DES ENERGIES EN PRESENCE DE CAVITES CIRCULAIRES POUR UN TENSEUR DES CONTRAINTES UNIFORME IMPOSE AUX FRONTIERES

Comme pour le chapitre 3. 2. , on cherche à calculer l'énergie élastique et l'énergie dissipée dans le problème V_0 sans connaître les déplacements aux frontières.

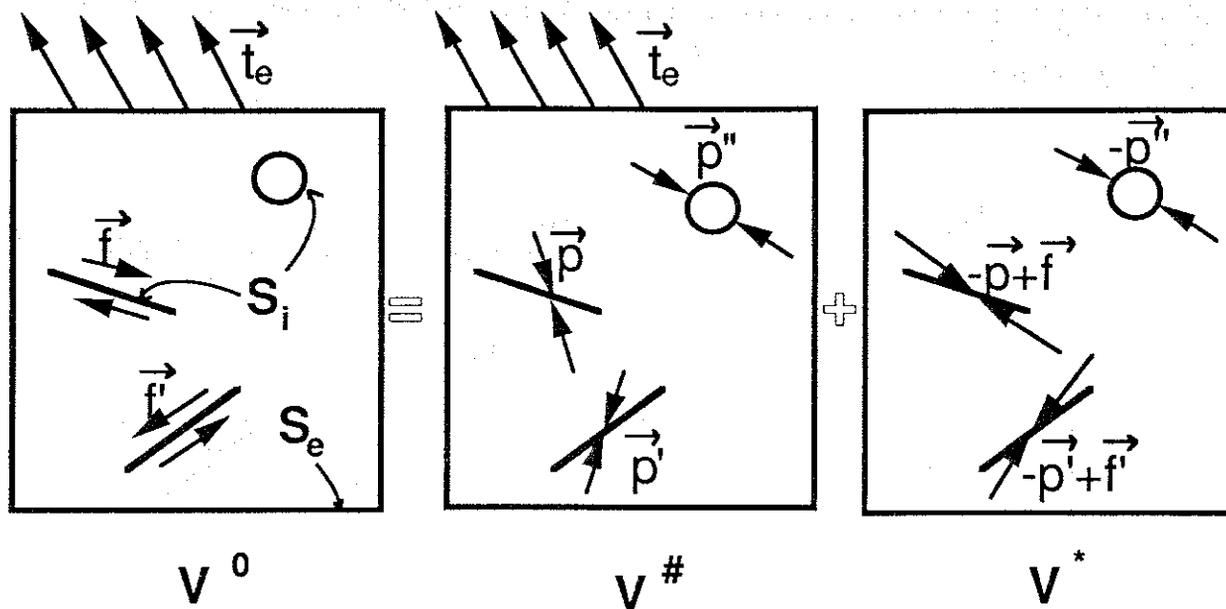


Figure 3. 3 : prise en compte de cavités circulaires.

3. 4. 1. RELATIONS LIEES A L'UNIFORMITE DU CHAMP

Le champ de contraintes dans le problème V étant supposé uniforme, le champ de déplacements dans le milieu respecte donc (Mécanique des Milieux Continus avec Hypothèse des Petites Perturbations).

$$\begin{cases} U_1 = a x_1 + b + e x_2 \\ U_2 = c x_2 + d + e x_1 \end{cases} \quad (3. 4. 1)$$

où:

$$a = \frac{\sigma_{11} (\lambda + 2\mu) - \lambda \sigma_{22}}{4\mu (\lambda + \mu)}$$

$$c = \frac{\sigma_{22} (\lambda + 2\mu) - \lambda \sigma_{11}}{4\mu (\lambda + \mu)}$$

$$e = \frac{\sigma_{12}}{2\mu} \quad (3. 4. 2)$$

b et d sont des constantes arbitraires.

3. 4. 2. UTILISATION DU PRINCIPE DE RECIPROCITE

En conservant les notations du chapitre 3. 2. on traduit le principe de réciprocité par :

$$\int_{S_e+S_i} \vec{u}^* \cdot \vec{p}^\# ds = \int_{S_e+S_i} \vec{u}^\# \cdot \vec{p}^* ds \quad (3. 4. 3)$$

Or $\vec{p}^\#$ peut se mettre sous la forme d'une série infinie de Fourier (expressions 1. 12. 5) et $\vec{u}^\#$ est affine. Le second membre de l'égalité peut se mettre sous la forme :

$$\int_{S_e+S_i} \vec{u}^\# \vec{p}^* ds = \int_{S_e} \vec{u}^\# \vec{0} ds + \int_{\substack{\text{fissures} \\ \text{pores}}} \vec{0} \vec{p}^* + \int_{\text{pores}} \vec{u}^\# \vec{p}^* ds \quad (3. 4. 4)$$

$$\int_{\text{pores}} \vec{u}^\# \vec{p}^* ds = \int_{\text{pores}} \begin{pmatrix} U_r \\ U_\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{rr} \\ P_{r\theta} \end{pmatrix} ds \quad (3. 4. 5)$$

en prenant comme origine le centre du pore, les déplacements dans le repère (r, θ) avec nos conventions pour l'axe θ s'expriment par :

$$U_r = b + r [(a \cos \theta + e \sin \theta) \cos \theta + (e \cos \theta + c \sin \theta) \sin \theta]$$

$$U_\theta = d + r [(a \cos \theta + e \sin \theta) \sin \theta - (e \cos \theta + c \sin \theta) \cos \theta] \quad (3. 4. 6)$$

on obtient finalement pour chaque pore i , en conservant les notations du chapitre 1 pour les pressions fictives :

$$\int_{\text{pore}} \vec{u}^\# \vec{p}^* ds = \pi \left(\frac{a-c}{2} [d(i \cos, 1, 2) + d(i \sin, 2, 2)] + e [d(i \sin, 1, 2) - d(i \cos, 2, 2)] \right) = W_{pi} \quad (3. 4. 7)$$

Seul l'ordre 2 de la série de Fourier intervient dans le travail des effort de V^* dans le champ de déplacements de $V^\#$.

Développons maintenant l'expression 3. 4. 4 :

$$\sum_{\text{pores}} W_{pi} = \underbrace{\int_{S_i} \vec{O}_F \cdot \vec{p}^\# ds}_{\substack{\vec{u}^* \text{ est connu} \\ \vec{p}^\# \text{ est connu}}} + \underbrace{\int_{S_e} \vec{u}^* \cdot \vec{p}^\# ds}_{\substack{\vec{p}^\# = \vec{t}_e \text{ est connu} \\ \vec{u}^* \text{ est inconnu}}}$$
 (3. 4. 8)

l'énergie fournie au système est :

$$\int_{S_e} \vec{u}^\# \cdot \vec{t}_e ds + \int_{S_e} \vec{u}^* \cdot \vec{t}_e ds = 2 W_f$$
 (3. 4. 9)

donc

$$2W_f = \int_{S_e} \vec{u}^\# \cdot \vec{t}_e ds - \int_{S_i} \vec{O}_F \cdot \vec{p}^\# ds + \sum_{\text{pores}} W_{pi}$$
 (3. 4. 10)

une expression analogue peut être fournie pour des conditions aux limites en déplacements.

3. 5. ENDOMMAGEMENT EN TRACTION SIMPLE POUR DES MILIEUX MULTIFISSURES - VALEURS DE L'ENDOMMAGEMENT d

Pour des matériaux multifissurés, on se propose d'évaluer la perte de rigidité en traction simple liée à la présence de fissures rectilignes. L'endommagement sera défini par une variable scalaire d :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E(1-d)} \quad (3. 5. 1)$$

en égalant les énergies pour le milieu élastique linéaire multifissuré et le milieu équivalent au sens de l'endommagement on obtient :

$$W = \int_V \sigma \cdot \varepsilon \, dv = \frac{\sigma^2 V}{E(1-d)} = \varepsilon^2 V E (1-d) \quad (3. 5. 2)$$

Pour des conditions aux limites en contraintes (toutes les fissures sont ouvertes donc $f = 0$), si V est le volume du domaine (d'épaisseur e et de surface S) :

$$w = \frac{\sigma^2 V}{E} + \frac{1}{2} \int_{S_i} \vec{Q}_F \cdot \vec{p}^* \, ds \quad (3. 5. 3)$$

Pour des conditions aux limites en déplacements :

$$w = \varepsilon^2 V E - \frac{1}{2} \int_{S_i} \vec{Q}_F \cdot \vec{p}^* \, ds \quad (3. 5. 4)$$

Supposons maintenant que les interactions soient négligeables, la densité de fissures étant faible et les fissures peu proches. Les efforts \vec{p}^* sur chaque fissure sont pour une contrainte de traction suivant l'axe 2 :

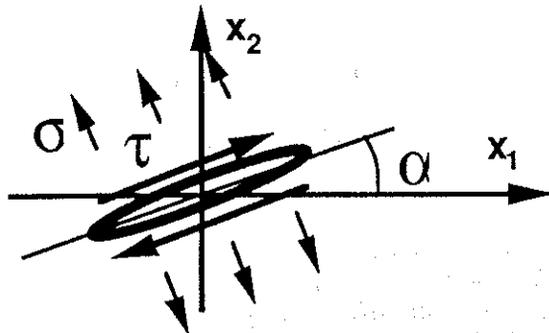


Figure 3. 4 : fissure faisant un angle alpha avec l'axe 1.

en traction simple d'axe 2 les efforts sur la fissure sont pour les conditions aux limites en contraintes :

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_{22} \cos^2 \alpha \\ \tau = \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha \end{cases}$$

en traction simple d'axe 2 les efforts sur la fissure sont pour les conditions aux limites en déplacements :

$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22} (1 - \nu^2)}{E}$$

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_{22} \cos^2 \alpha - \nu \sigma_{22} \sin^2 \alpha \\ \tau = (1 - \nu) \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha \end{cases}$$

l'énergie pour une fissure i s'exprime par, e étant l'épaisseur du milieu plan :

$$W_i = \int_{\text{fissure}_i} \vec{Q}_F \cdot \vec{p}^* \, eds = \pi e \frac{a_i^2}{E} (\sigma_i^2 + \tau_i^2) \quad (3.5.5)$$

en égalant les expressions (3.5.2) (3.5.3) (3.5.4) et en utilisant (3.5.5) on obtient pour une même contrainte σ_{22} deux valeurs de d :

pour les conditions aux limites en contraintes :

$$d = 1 - \frac{1}{1 - \sum_i \pi \frac{a_i^2}{S} (\cos^2 \alpha_i)} \quad (3.5.6)$$

et pour les conditions aux limites en déplacements :

$$d = \frac{\sum_i \pi \frac{a_i^2}{S} (\cos^2 \alpha_i + \nu^2 \sin^2 \alpha_i - 4 \nu \sin^2 \alpha_i \cos^2 \alpha_i)}{(1 - \nu^2)^2} \quad (3.5.7)$$

Bien sûr lorsque la densité de fissures augmente, ces valeurs deviennent aberrantes du fait des interactions. Cependant on met ainsi en évidence le fait qu'un milieu multifissuré se comporte comme une structure et l'endommagement lié aux fissures est difficilement descriptible par une seule variable scalaire. Suivant que l'élément de volume considéré se situe entre deux inclusions souples ou rigides, sa réponse au sens de sa rigidité sera différente.

CONSTRUCTION DES OPERATEURS

\mathcal{F}_{ij} , \mathcal{B}_{ij} et \mathcal{P}_{ij}

4. CONSTRUCTION DES OPERATEURS \mathcal{F}_{ij} , \mathcal{B}_{ij} et \mathcal{P}_{ij}

Dans ce paragraphe on indique comment ont été construits les différents opérateurs Fissures, Bords et Pores. Pour cela on rappellera les solutions des potentiels complexes et les fonctions d'Airy et on illustre également les problèmes liés au caractère multiforme des fonctions utilisées.

4.1. FISSURE SOUS PRESSIONS POLYNOMIALES

4.1.1. SOLUTION DE DEPART

On fournit ici les solutions par les potentiels complexes.

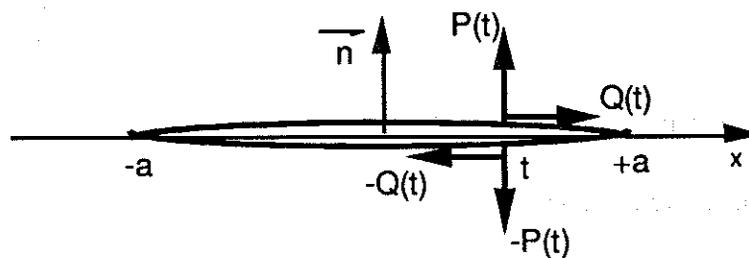


Figure 4. 1 : fissure soumise à une force ponctuelle.

La solution de ce problème (Erdogan, 1962) est donnée par :

$$\phi(z) = -\frac{P - i Q}{\pi(z - t)} \sqrt{\frac{a^2 - t^2}{z^2 - a^2}} \quad (4.1.1)$$

d'où :

$$\frac{\partial \phi(z)}{\partial z} = \phi'(z) = -\frac{P - i Q}{\pi} \sqrt{a^2 - t^2} \frac{a^2 + zt - 2z^2}{(z - t)^2 (z^2 - a^2)^{3/2}} \quad (4.1.2)$$

Le potentiel complexe $\phi(z)$ utilisé pour une répartition d'efforts normaux aux lèvres de la fissure ($P(t) = f(t)$) sera aussi utilisé pour une répartition d'efforts tangentiels aux lèvres de la fissure ($Q(t) = f(t)$) en utilisant les expressions suivantes :

Pour $P(t) = f(t)$, on obtient les contraintes à partir de :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \text{Re } \phi - y \text{ Im } \phi' \\ \sigma_{12} = -y \text{ Re } \phi' \\ \sigma_{22} = \text{Re } \phi + y \text{ Im } \phi' \end{cases} \quad (4.1.3)$$

Puis les déplacements à partir de :

En déformation planes : en contraintes planes :

$$\begin{cases} 2\mu u = (1-2\nu) \text{Re } \psi - y \text{Im } \phi & (1-2\nu) \text{ devient : } (1-\nu)/(1+\nu) \\ 2\mu v = 2(1-\nu) \text{Im } \psi - y \text{Re } \phi & 2(1-\nu) \text{ devient : } 2/(1+\nu) \end{cases} \quad (4.1.4)$$

$$\text{avec } \frac{\partial \psi(z)}{\partial z} = \phi(z) \quad (4.1.5)$$

Pour $Q(t) = g(t)$, on obtient à l'aide du même potentiel complexe les contraintes à partir de :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2 \operatorname{Im} \phi + y \operatorname{Re} \phi' \\ \sigma_{xy} = \operatorname{Re} \phi - y \operatorname{Im} \phi' \\ \sigma_{yy} = -y \operatorname{Re} \phi' \end{cases} \quad (4.1.6)$$

Puis les déplacements en déformations planes à partir de :

$$\begin{cases} 2\mu u = (1 - 2\nu) \operatorname{Im} \psi + y \operatorname{Re} \phi \\ 2\mu v = - (1 - \nu) \operatorname{Re} \psi - y \operatorname{Im} \phi \end{cases} \quad (4.1.7)$$

4.1.2. SOLUTIONS POUR DES DISTRIBUTIONS MONOMIALES

Pour $f(t) = t^n$ on obtient (Muskhelishvili, 1953) :

$$\phi(z) = \frac{1}{a^n \sqrt{z^2 - a^2}} \left[-z^n \sqrt{z^2 - a^2} + \sum_{i=1}^{-n} \alpha_i z^{i+n} \right] \quad (4.1.8)$$

où les coefficients α_i sont les coefficients des termes du développement en série de $\sqrt{t^2 - a^2}$ pour t grand :

$$\sqrt{t^2 - a^2} = \sum_{i=1}^{-\infty} \alpha_i t^i = t + \left(\frac{-a^2}{2}\right) t^{-1} + \left(\frac{-a^4}{8}\right) t^{-3} + \dots \quad (4.1.9)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_0 = 0 \\ \alpha_{-1} = \frac{-a^2}{2} \\ \alpha_{-2} = 0 \\ \alpha_{-3} = \frac{-a^4}{8} \end{cases}$$

$$\text{puis } \alpha_{-2n+1} = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{2} - n + 1 \right) a^{2n} \right) \quad \text{pour } n \geq 1 \quad (4.1.10)$$

4.1.3. MULTIFORMITE DES FONCTIONS COMPLEXES ET IMPLANTATION NUMERIQUE

Les potentiels complexes qui interviennent dans le calcul des contraintes font intervenir la fonction racine carrée, qui fournit deux solutions pour chaque complexe. La valeur des contraintes peut être calculée pour z dans le premier

cadran ($\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$), si l'on choisit comme solution de la racine carrée celle dont l'angle est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Pour $z : x + iy$ se situant dans un autre cadran, il convient de se ramener au premier cadran en utilisant $z^* = |x| + i |y|$.

Soit $k = 1$ pour les contraintes normales et 2 pour les contraintes tangentielles ; soit n désignant l'ordre du polynôme considéré (si n est pair, le polynôme correspondant est une fonction paire est si n est impair, le polynôme correspondant est une fonction impaire). En conséquence, à partir des valeurs calculées pour z^* on tire :

$$\begin{cases} \sigma_{11}(z) = \sigma_{11}(z^*) [\text{sgn}(x)]^{n+k+1} [\text{sgn}(y)]^{k+1} \\ \sigma_{12}(z) = \sigma_{12}(z^*) x [\text{sgn}(x)]^{n+k} [\text{sgn}(y)]^{k+1} \\ \sigma_{22}(z) = \sigma_{22}(z^*) [\text{sgn}(x)]^{n+k+1} [\text{sgn}(y)]^{k+1} \end{cases} \quad (4. 1. 11)$$

4. 1. 4. CALCUL DES DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT

Le calcul des ouvertures de fissure, ou discontinuité de déplacements, n'est pas immédiat à l'aide des expressions précédentes. En effet, pour une fissure chargée par une pression normale constante p_0 , on trouve en contraintes planes.

$$\begin{aligned} \Psi &= p_0 (\sqrt{z^2 - a^2} - z) \quad \text{et} \quad \phi = p_0 \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right) \\ \text{et} \quad \phi' &= p_0 \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} - \frac{z^2}{\sqrt[3]{z^2 - a^2}} \right) \end{aligned} \quad (4. 1. 12)$$

D'où :

$$\begin{cases} u(z) = \frac{P_0}{2\mu} \left[\left(\frac{1-\nu}{1+\nu} \text{Re} (\sqrt{z^2 - a^2} - z) - y \text{Im} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right) \right) \right] \\ v(z) = \frac{P_0}{2\mu} \left[\frac{2}{1+\nu} \text{Im} (\sqrt{z^2 - a^2} - z) - y \text{Re} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right) \right] \end{cases} \quad (4. 1. 13)$$

Pour $z = x + i \varepsilon$ où $\begin{cases} \varepsilon \text{ est petit} \\ x \in [-a, a] \end{cases}$, on obtient :

$$v^+ - v^- = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(z) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(\bar{z}) = \frac{P_0 (1 - \nu)}{\mu} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (*) (4. 1. 14)$$

(*) à condition de choisir correctement la racine carrée.

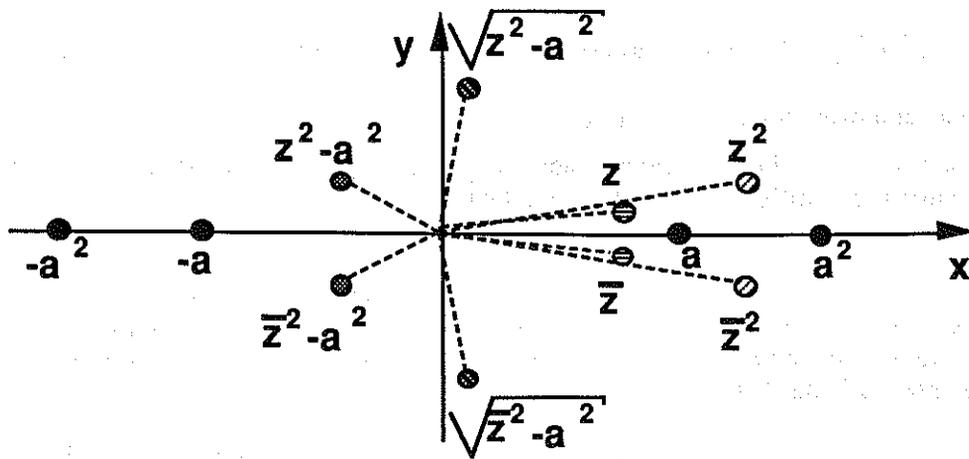


Figure 4. 2 : choix de la racine carrée dans le plan complexe.

Finalement on retrouve l'ouverture en ellipse des fissures (en contrainte plane) :

$$\hat{v}_0(x) = \frac{4 P_0}{E} \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{4a P_0}{E} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \quad (4. 1. 15)$$

Pour les quatre monômes suivants, les primitives des potentiels complexes mis en jeu sont pour les chargements normaux :

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \sqrt{z^2 - a^2} - z \\ \psi_1 &= \frac{1}{2a} \left[z \sqrt{z^2 - a^2} - \frac{z^2}{2} \right] \\ \psi_2 &= \frac{1}{a^2} \left[\sqrt{z^2 - a^2} \left(\frac{z^2}{3} + \frac{a^2}{6} \right) - \frac{z^3}{3} \right] \\ \psi_3 &= \frac{1}{a^3} \left[\sqrt{z^2 - a^2} \left(\frac{z^3}{4} + \frac{z a^2}{8} \right) - \frac{z^4}{4} \right] \\ \psi_4 &= \frac{1}{a^4} \left[\sqrt{z^2 - a^2} \left(\frac{z^2 a^2}{10} + \frac{3a^4}{40} + \frac{z^4}{5} \right) - \frac{z^5}{5} \right] \end{aligned} \quad (4. 1. 16)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \hat{v}_1(x) &= \frac{2a}{E} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \left(\frac{x}{a} \right) \\ \hat{v}_2(x) &= \frac{4a}{E} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \frac{1}{6} \right) \\ \hat{v}_3(x) &= \frac{4a}{E} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \frac{1}{8} \frac{x}{a} \right) \end{aligned}$$

$$\hat{v}_4(x) = \frac{4a}{E} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \left(\frac{1}{5} \left(\frac{x}{a}\right)^4 + \frac{1}{10} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{3}{40} \right) \quad (4.1.17)$$

et pour l'autre composante du vecteur des discontinuités :

$$\hat{u}_0(x) = \hat{u}_1(x) = \hat{u}_2 = \hat{u}_3(x) = \hat{u}_4(x) = 0 \quad \forall x.$$

Ces expressions restent valables pour le chargement tangentiel, il suffit d'inverser la valeur de $\hat{u}_n(x)$ et $\hat{v}_n(x)$.

Calcul des autres déplacements :

On calculera u et v dans le premier cadran puis :

$$\begin{aligned} u(z) &= u(z^*) [\operatorname{sgn}(x)]^{l+k} \times [\operatorname{sgn}(y)]^{k+1} \\ v(z) &= v(z^*) [\operatorname{sgn}(x)]^{l+k+1} \times [\operatorname{sgn}(y)]^k \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

4.1.5. APPLICATIONS AUX CINQ PREMIERS POLYNOMES DE LEGENDRE

Les indices supérieurs "L" servent à différencier les potentiels et fonctions pour les monômes (pas d'indice supérieur) de ceux pour les polynômes de Legendre. Pour les degrés 0 et 1, Ψ_1 et Ψ_0 servent aussi pour les polynômes de Legendre : $\Psi_0^L = \Psi_1$ et $\Psi_1^L = \Psi_1$.

$$\begin{aligned} \Psi_2^L &= \sqrt{z^2 - a^2} \left[2 \left(\frac{z}{a}\right)^2 - \frac{1}{4} \right] - z \left[2 \left(\frac{z}{a}\right)^2 - \frac{1}{2} \right] \\ \Psi_3^L &= \sqrt{z^2 - a^2} \left[\frac{5}{8} \left(\frac{z}{a}\right)^3 - \frac{7z}{16a} \right] - z \left[\frac{5}{8} \left(\frac{z}{a}\right)^3 - \frac{3z}{4a} \right] \\ \Psi_4^L(x) &= \sqrt{z^2 - a^2} \left[\frac{7}{8} \left(\frac{z}{a}\right)^4 - \frac{13}{16} \left(\frac{z}{a}\right)^2 + \frac{5}{16} \right] \\ &\quad - z \left[\frac{7}{8} \left(\frac{z}{a}\right)^4 - \frac{10}{8} \left(\frac{z}{a}\right)^2 + \frac{3}{8} \right] \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \hat{v}_0^L(x) &= \frac{4a}{E} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \\ \hat{v}_1^L(x) &= \frac{2a}{E} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \left(\frac{x}{a}\right) \\ \hat{v}_2^L(x) &= \frac{a}{E} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \left(2 \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1 \right) \end{aligned}$$

$$v_3^{\wedge L}(x) = \frac{a}{E} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \left(\frac{5}{2} \left(\frac{x}{a}\right)^3 - \frac{7x}{4a} \right)$$

$$v_4^{\wedge L}(x) = \frac{a}{E} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \left(\frac{7}{2} \left(\frac{x}{a}\right)^4 - \frac{13}{4} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{5}{16} \right)$$

(4. 1. 20)

4. 1. 6. FACTEURS D'INTENSITE DES CONTRAINTES ASSOCIES AUX DISTRIBUTIONS POLYNOMIALES

Les facteurs d'intensité des contraintes en mode I ou II pour $f(t) = t^n$ valent pour $n \in [0,4]$:

$$K_{In} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a t^n \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx \quad (4. 1. 21)$$

$$K_{I0} = \sqrt{\pi a} \text{ pour } n = 0$$

$$K_{I1} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\pi a} \text{ pour } n = 1$$

$$K_{I2} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi a} \text{ pour } n = 2$$

$$K_{I3} = \pm \frac{3}{8} \sqrt{\pi a} \text{ pour } n = 3$$

$$K_{I4} = \frac{3}{8} \sqrt{\pi a} \text{ pour } n = 4$$

Les ordres impairs sont affectés du signe "-" pour le début de la fissure et du signe "+" pour la fin de fissure. L'application au 5 premiers polynômes de Legendre fournit :

$$\begin{aligned} K_{I0}^L &= \sqrt{\pi a} \\ K_{I1}^L &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{\pi a} \\ K_{I2}^L &= \frac{1}{4} \sqrt{\pi a} \\ K_{I3}^L &= \pm \frac{3}{16} \sqrt{\pi a} \\ K_{I4}^L &= \frac{9}{64} \sqrt{\pi a} \end{aligned} \quad (4. 1. 22)$$

4. 2. MILIEUX ELASTIQUES PLANS SEMI-INFINIS CHARGES PAR DES PRESSION MONOMIALES SUR UN SEGMENT

4. 2. 1. SOLUTION DE BOUSSINESQ

4. 2. 1. 1. CONTRAINTES

Les expressions de σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} sont données en (1. 11. 1) et (1. 11. 2) pour une force ponctuelle P normale à la surface ou Q tangentielle à la surface (indices supérieurs des composantes du tenseur des contraintes). La contrainte dans le milieu pour $P(x) = x^n dx$ où $Q(x) = x^n dx$ avec $x \in [-1, 1]$ sont donnée par :

$$\sigma_{11}^P = \frac{-2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{y t^n (x-t)^2}{((x-t)^2 + y^2)^2} dt = \sigma_{12}^Q$$

$$\sigma_{12}^P = \frac{-2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{y^2 t^n (x-t)}{((x-t)^2 + y^2)^2} dt = \sigma_{22}^Q$$

$$\sigma_{22}^P = \frac{-2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{y^3 t^n}{((x-t)^2 + y^2)^2} dt = \sigma_{22}^Q$$

$$\sigma_{11}^Q = \frac{-2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{(x-t)^3 t^n}{((x-t)^2 + y^2)^2} dt \quad (4. 2. 1)$$

Ces intégrations ne donnent pas en général des expressions simples. Elles ont été obtenues à l'aide du logiciel de calculs mathématiques formels MACSYMA. A titre d'exemple, des résultats sont fournis ci-après pour $n \in [0,4]$. Il faut noter que ces expressions peuvent être traduites automatiquement en langage Fortran par MACSYMA, on évite ainsi l'erreur de frappe.

4. 2. 1. 2. DEPLACEMENTS

De la même façon on obtient les déplacements dans le milieu en intégrant les expressions suivantes :

Pour une force P normale à la surface :

$$\frac{\pi E u}{P} = \frac{(1+\nu)(x-t)y}{(x-t)^2 + y^2} - (1-\nu) \operatorname{Arctg}\left(\frac{x-t}{y}\right)$$

$$\frac{\pi E v}{P} = -\log((x-t)^2 + y^2) + \frac{(1+\nu)(x-t)^2}{(x-t)^2 + y^2}$$

Pour une force P tangentielle à la surface :

$$\frac{\pi E u}{P} = -\log((x-t)^2 + y^2) + \frac{(1+\nu)y^2}{(x-t)^2 + y^2}$$

$$\frac{\pi E v}{P} = \frac{(1+\nu)(x-t)y}{(x-t)^2 + y^2} - (1-\nu) \left(\text{Arctg}\left(\frac{x-t}{y}\right) + \frac{\pi}{2} \right)$$

(4.2.2)

4.2.2. EXPRESSIONS OBTENUES

Les expressions obtenues par ces intégrations deviennent vite volumineuses et on comprendra aisément qu'elles n'apparaissent toutes pas ici. A titre d'exemple la contrainte σ_{11} du chargement tangentiel en x^3 calculée et traduite en langage FORTRAN par MACSYMA est fournie ci-après.

```

*****
integrate(a**a*(x-a)*(x-a)*((x-a)**2+y**2)**2,a);
      ((18 X 4 + (15 X 3 - 36 X 2 + 18 X) Y - 3 X 5 + 6 X 4 - 3 X 3)
LOG(Y 2 + X 2 - 2 X + 1) + 15 ATAN(X - 1 / Y) Y 5 + (6 X + 15) Y 4
+ (- 12 X 2 - 30 X + 15) ATAN(X - 1 / Y) Y 3 + (6 X 3 - 3 X 2 - 27 X + 10) Y 2
+ (- 27 X 4 + 54 X 3 - 27 X 2) ATAN(X - 1 / Y) Y - 6 X 4 + 9 X 3 - 2 X 2 + X - 2)
/(6 Y 2 + 6 X 2 - 12 X + 6) - ((18 X 4 + (15 X 3 + 36 X 2 + 18 X) Y - 3 X 5 - 6 X 4
- 3 X 3) LOG(Y 2 + X 2 + 2 X + 1) + 15 ATAN(X + 1 / Y) Y 5 + (6 X - 15) Y 4
+ (- 12 X 2 + 30 X + 15) ATAN(X + 1 / Y) Y 3 + (6 X 3 + 3 X 2 - 27 X - 10) Y 2
+ (- 27 X 4 - 54 X 3 - 27 X 2) ATAN(X + 1 / Y) Y + 6 X 4 + 9 X 3 + 2 X 2 + X + 2)
/(6 Y 2 + 6 X 2 + 12 X + 6)
S11T3=((18*X**4+(15*X**3-36*X**2+18*X)*Y**2-3*X**5+6*X**4-3*X**3
1 )*LOG(Y**2+X**2-2*X+1)+15*ATAN((X-1)/Y)*Y**5+(6*X+15)*Y**4+(-12*
2 X**2-30*X+15)*ATAN((X-1)/Y)*Y**3+(6*X**3-3*X**2-27*X+10)*Y**2+(-
3 -27*X**4+54*X**3-27*X**2)*ATAN((X-1)/Y)*Y-6*X**4+9*X**3-2*X**2+
4 X-2)/(6*Y**2+6*X**2-12*X+6)-((18*X**4+(15*X**3+36*X**2+18*X)*
5 Y**2-3*X**5-6*X**4-3*X**3)*LOG(Y**2+X**2+2*X+1)+15*ATAN((X+1)/Y
6 )*Y**5+(6*X+15)*Y**4+(-12*X**2+30*X+15)*ATAN((X+1)/Y)*Y**3+(6*X
7 **3+3*X**2-27*X-10)*Y**2+(-27*X**4-54*X**3-27*X**2)*ATAN((X+1)/
8 Y)+6*X**4+9*X**3+2*X**2+X+2)/(6*Y**2+6*X**2+12*X+6)
*****

```

4. 3. CAVITES CIRCULAIRES ET PRESSIONS EN SERIE DE FOURIER

4. 3. 1. SOLUTION GENERALE

Timoshenko et Goodier [TIMOSHENKO third edition] ont donné la fonction d'Airy, concernant des éléments plans circulaires (cavités, disques, anneaux) soumis à des contraintes extérieures. Soit $A(r,\theta)$ la fonction d'Airy, on obtiendra les contraintes et les déplacements à l'aide des expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + V \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + V \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right] \\ E \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} - \nu \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} \\ E \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} &= r \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - \nu \left(\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} \right) - E u_r \\ \frac{1+\nu}{E} \left(-\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right] \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right)\end{aligned}\quad (4. 3. 1)$$

En l'absence de forces de volume, $V = 0$.

$$\begin{aligned}A(r,\theta) &= a_0 \ln r + b_0 r^2 + c_0 r^2 \ln r + d_0 r^2 \theta + a'_0 \theta \\ &+ \frac{a_1}{2} r \theta \sin \theta + \left(b_1 r^3 + \frac{a'_1}{r} + b'_1 r \ln r \right) \cos \theta \\ &- \frac{c_1}{2} r \theta \cos \theta + \left(d_1 r^3 + \frac{c'_1}{r} + d'_1 r \ln r \right) \sin \theta \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \left(a_n r^n + b_n r^{n+2} + \frac{a'_n}{r^n} + \frac{b'_n}{r^{n-2}} \right) \cos n \theta \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \left(c_n r^n + d_n r^{n+2} + \frac{c'_n}{r^n} + \frac{d'_n}{r^{n-2}} \right) \sin n \theta\end{aligned}\quad (4. 3. 2)$$

On obtient par différentiations le champ des contraintes pour tout problème de cavités circulaires, disques, anneaux en l'absence de forces volumiques :

$$\sigma_{rr} = \frac{a_0}{r^2} + 2 b_0 + c_0 (1 + 2 \log(r)) + 2 d_0 \theta$$

$$+ \cos \theta \left(2 b_1 r + \frac{a_1 + b_1'}{r} - \frac{2a_1'}{r^3} \right) + \sin \theta \left(2 d_1 r + \frac{c_1 + d_1'}{r} - \frac{2c_1'}{r^3} \right)$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \cos n \theta \left(a_n (n) (1-n) r^{n-2} + b_n (2+n-n^2) r^n \right) \right.$$

$$\left. + \sin n \theta \left(c_n (n) (1-n) r^{n-2} + d_n (2+n-n^2) r^n \right) \right\}$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \cos n \theta \left(-\frac{a_n' (n) (n+1)}{r^{n+2}} + \frac{b_n' (2-n-n^2)}{r^n} \right) \right.$$

$$\left. + \sin n \theta \left(-\frac{c_n' (n) (n+1)}{r^{n+2}} + \frac{d_n' (2-n-n^2)}{r^n} \right) \right\}$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{a_0'}{r^2} - d_0 + \cos \theta \left(-2 d_1 r + \frac{2c_1'}{r^3} - \frac{d_1'}{r} \right) + \sin \theta \left(2 b_1 r - \frac{2a_1'}{r^3} + \frac{b_1'}{r} \right)$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \sin n \theta \left(-a_n (n) (1-n) r^{n-2} + b_n (n+n^2) r^n \right) \right.$$

$$\left. + \cos n \theta \left(c_n (n) (1-n) r^{n-2} - d_n (n+n^2) r^n \right) \right\}$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \cos n \theta \left(\frac{c_n' (n) (n+1)}{r^{n+2}} + \frac{d_n' (n)(n-1)}{r^n} \right) \right.$$

$$\left. + \sin n \theta \left(-\frac{a_n' (n) (n+1)}{r^{n+2}} - \frac{b_n' (n)(n-1)}{r^n} \right) \right\}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{-a_0}{r^2} + 2 b_0 + c_0 (3 + 2 \log(r)) + 2 d_0 \theta$$

$$+ \cos \theta \left(6 b_1 r + \frac{2a_1'}{r^3} + \frac{b_1'}{r} \right) + \sin \theta \left(6 d_1 r + \frac{2c_1'}{r^3} + \frac{d_1'}{r} \right)$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \cos n \theta \left(a_n (n) (n-1) r^{n-2} + b_n (n+1)(n+2) r^n \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sin n\theta \left(c_n (n)(n-1)r^{n-2} + d_n (n+1)(n+2)r^n \right) \Big\} \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \cos n\theta \left(\frac{a'_n (n)(n+1)}{r^{n+2}} + \frac{b'_n (1-n)(2-n)}{r^n} \right) \right. \\
& \quad \left. + \sin n\theta \left(\frac{c'_n (n)(n+1)}{r^{n+2}} + \frac{d'_n (1-n)(2-n)}{r^n} \right) \right\} \quad (4.3.3)
\end{aligned}$$

Les conditions aux limites en contrainte ne suffisent pas à identifier la totalité des coefficients (conditions aux limites sur le contour et à l'infini). Il faut donc évaluer les déplacements pour résoudre le problème (obtention du nombre suffisant de conditions ou d'équations pour le nombre d'inconnues). D'autre part le problème de l'inclusion circulaire nécessite de connaître les solutions pour des cavités circulaires en milieu infini mais aussi pour des disques soumis à des contraintes et des déplacements. On développe donc ici pour la totalité des termes les champs de contraintes et déplacements à l'exception du terme d_0 pour lequel l'équilibre en moment et les conditions de compatibilités nécessitent des relations entre d_0 et d'autres termes. Les déplacements peuvent donc être donnés lorsque $d_0 = 0$ par :

$$\begin{aligned}
u_r = & \frac{1}{E} \left[(1+\nu) \frac{-a_0}{r} + 2b_0 r (1-\nu) \right. \\
& + c_0 r (2(1-\nu) \log(r) - 1 - \nu) + 2d_0 (1-\nu) r \theta \\
& + \cos \theta \left(a_1 \left(\log(r) - \frac{1}{2} \right) + b_1 r^2 (1-3\nu) + c_1 \frac{\theta}{2} (\nu-1) \right. \\
& \quad \left. + b'_1 ((1-\nu) \log(r) - 2 - \nu) + (1+\nu) \frac{a'_1}{r^2} - 2d'_1 \theta + A \right) \\
& + \sin \theta \left(-a_1 \frac{\theta}{2} (\nu-1) + c_1 \left(\log(r) - \frac{1}{2} \right) + d_1 r^2 (1-3\nu) + \right. \\
& \quad \left. d'_1 ((1-\nu) \log(r) - 2 - \nu) + (1+\nu) \frac{c'_1}{r^2} + 2b'_1 \theta + B \right) \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \cos n\theta \left(a_n r^{n-1} (-n)(1+\nu) + b_n r^{n+1} (2(1-\nu) - n(1+\nu)) \right) \right. \\
& \quad \left. + \sin n\theta \left(c_n r^{n-1} (-n)(1+\nu) + d_n r^{n+1} (2(1-\nu) - n(1+\nu)) \right) \right\} \Big] \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \cos n\theta \left(\frac{a'_n (n)(1+\nu)}{r^{n+1}} + \frac{b'_n (2(1-\nu) + n(1+\nu))}{r^{n-1}} \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin n\theta \left(\frac{c'_n (n) (1 + \nu)}{r^{n+1}} + \frac{d'_n (2(1 - \nu) + n(1 + \nu))}{r^{n-1}} \right) \Big] \Big] \\
u_\theta &= \frac{1}{E} \left[4 c_0 r \theta - (1 + \nu) \left(\frac{a'_0}{r} \right) - \nu d_0 r + C r \right. \\
& + \sin \theta \left(- a_1 \left(\log(r) + \frac{\nu}{2} \right) + b_1 r^2 (5 + \nu) + \frac{\theta}{2} c_1 (1 - \nu) \right. \\
& \quad \left. + \frac{a'_1}{r^2} (1 + \nu) + b'_1 (1 - \log(r)(1 - \nu)) - A \right) \\
& + \cos \theta \left(\frac{\theta}{2} a_1 (1 - \nu) + c_1 \left(\log(r) + \frac{\nu}{2} \right) - d_1 r^2 (5 + \nu) \right. \\
& \quad \left. - \frac{c'_1}{r^2} (1 + \nu) - d'_1 (1 - \log(r)(1 - \nu)) + 2b'_1 \theta + B \right) \Big] \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \sin n\theta \left(a_n r^{n-1} (n) (1 + \nu) + b_n r^{n+1} (4 + (n) (1 + \nu)) \right) \right. \\
& \quad \left. + \cos n\theta \left(- c_n r^{n-1} (n) (1 + \nu) - d_n r^{n+1} (4 + (n) (1 + \nu)) \right) \right\} \Big] \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \cos n\theta \left(- \frac{c'_n (n) (1 + \nu)}{r^{n+1}} - \frac{d'_n ((n) (1 + \nu) - 4)}{r^{n-1}} \right) \right. \\
& \quad \left. + \sin n\theta \left(\frac{a'_n (n) (1 + \nu)}{r^{n+1}} + \frac{b'_n ((n) (1 + \nu) - 4)}{r^{n-1}} \right) \right\} \Big]
\end{aligned}$$

où A, B, et C sont des constantes. (4. 3. 4)

Notre problème se limitant aux cavités en milieu infini, les contraintes doivent tendre vers 0 quand r tend vers l'infini ainsi que les déplacements. Ceci impose :

$$b_0 = c_0 = d_0 = a_1 = b_1 = b'_1 = c_1 = d_1 = d'_1 = a_n = b_n = c_n = d_n = 0$$

D'autre part, en l'absence de force de volume dans notre cas et l'équilibre d'un disque impose que la résultante des efforts et moments soient nulles. Ceci implique :

$$a'_0 = 0$$

En pratique, en utilisant des rotations de $\frac{\pi}{2n}$, seuls les coefficients en a et b auront à être identifiés. D'autre part, si l'on veut rester cohérents avec les

conventions de signe du cisaillement, il faut inverser le signe de $\sigma_{r\theta}$ dans les expressions précédente :

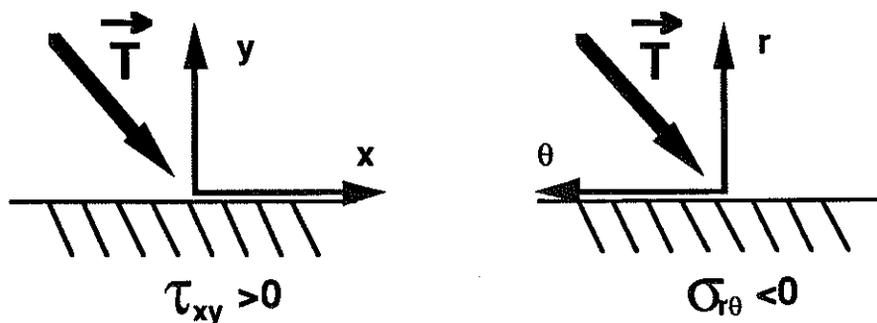


Figure 4. 3 : changement de repère.

On obtient donc avec $\tau_{r\theta} = -\sigma_{r\theta}$ et pour les distributions en cosinus :

$$\sigma_{rr} = \frac{a_0}{r^2} + \cos \theta \left(\frac{-2a_1'}{r^3} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} \cos n \theta \left(\frac{b_n' (2-n-n^2)}{r^n} - \frac{a_n' (n)(n+1)}{r^{n+2}} \right) \quad (4.3.5)$$

$$\tau_{r\theta} = - \left[\sin \theta \left(\frac{-2a_1'}{r^3} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} n \sin n \theta \left(\frac{b_n' (1-n)}{r^n} - \frac{a_n' (n+1)}{r^{n+2}} \right) \right] \quad (4.3.6)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{-a_0}{r^2} + \cos \theta \left(\frac{2a_1'}{r^3} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} \cos n \theta \left(\frac{b_n' (2+n^2-3n)}{r^n} + \frac{a_n' (n)(n+1)}{r^{n+2}} \right) \quad (4.3.7)$$

4.3.2. IDENTIFICATION DES COEFFICIENTS

4.3.2.1. CHARGEMENT EN PRESSION CONSTANTE

Seul le chargement avec une contrainte normale respecte les conditions d'équilibre. Le moment introduit par un effort tangentiel constant appliqué à l'intérieur du pore ne peut être équilibré par aucun autre chargement de la série de Fourier. Appelons R_p le rayon du pore.

$$(\sigma_{rr} = -1 \text{ et } \tau_{r\theta} = 0) \Rightarrow a_0 = R_p^2 \text{ et } \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr}$$

$$a'_1 = a'_n = b'_n = 0 \quad \forall n$$

4. 3. 2. 2. CHARGEMENT D'ORDRE 1

On ne peut pas dissocier, en l'absence de force de volume l'application d'un effort normal à la surface en "cosinus" d'un effort tangentiel en "sinus" par raison d'équilibre des forces extérieures appliquées sur le solide considéré. On a donc :

$$\sigma_{rr} = -\cos \theta \Rightarrow \tau_{r\theta} = \sin \theta \text{ et } a'_1 = \frac{R_p^3}{2}$$

$$a_0 = b'_n = a'_n = 0 \quad \forall n$$

Pour obtenir $\sigma_{rr} = -\sin \theta$ on utilise les expressions (4. 3. 5), (4. 3. 6) et (4. 3. 7) en remplaçant θ par :

$$\theta - \frac{\pi}{2} \text{ et on a } \tau_{r\theta} = -\cos \theta$$

4. 3. 2. 3. CHARGEMENT D'ORDRE N

$$\sigma_{rr} = -\cos n\theta \text{ et } \tau_{r\theta} = 0 \Rightarrow a'_n = -\frac{R_p^{n+2}}{2n+2} \text{ et } b'_n = \frac{R_p^n}{2n-2}$$

$$a_0 = a'_1 = 0$$

Pour obtenir $\sigma_{rr} = -\sin n\theta$ et $\tau_{r\theta} = 0$ on remplace θ par $\theta - \frac{\pi}{2n}$ dans les expressions (4. 3. 5), (4. 3. 6) et (4. 3. 7).

$$\sigma_{rr} = 0 \text{ et } \tau_{r\theta} = -\sin n\theta \Rightarrow a'_n = -\frac{R_p^{n+2} (2+n)}{2n(n+1)} \text{ et } b'_n = \frac{R_p^n}{2n-2}$$

Pour obtenir $\tau_{r\theta} = -\cos n\theta$ et $\sigma_{rr} = 0$ on remplace θ par $\theta + \frac{\pi}{2n}$ dans les expressions [a], [b] et [c].

4. 3. 3. IMPLANTATION DANS LA BIBLIOTHEQUE DE FONCTIONS

Tout étant paramétré, on peut faire varier l'ordre des sinusoides à loisir. Les éléments de bibliothèque de fonction concernant les sinus et cosinus permettent ainsi des développements en série très poussés. Lors de la programmation, il est important de normer les valeurs à l'aide de $\frac{R}{R_p}$ sinon on dépasse très vite la précision des machines pour le calcul des coefficients de concentration de contraintes.

ANNEXES

A4. 1. POLYNOMES DE LEGENDRE

On fournit ici les expressions des 5 premiers polynômes de Legendre qui servent à décrire les pressions dans les fissures et sur les frontières. Pour $x \in [-1, 1]$:

$$L(0,x) = 1$$

$$L(1,x) = x$$

$$L(2,x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$L(3,x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$L(4,x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8}$$

$$\text{L'expression générale est : } L(n,x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\delta(x^2 - 1)^n}{\delta x^n}$$

Les courbes de la figure A4. 1. 1 (à gauche) correspondent aux cinq premiers polynômes.

A4. 2. EFFET DES PRESSIONS POLYNOMIALES SUR LES DEPLACEMENTS

A4. 2. 1. DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT

Les courbes de la figure A4. 1. 1 (à droite) illustrent les discontinuités de déplacement induites par des pressions normales ou tangentielles dans une fissure, pressions distribuées suivant les 5 premiers polynômes de Legendre (les pointillés correspondent pour les 2 séries de courbes).

La fissure d'axe x a une longueur $2a$ et $O_F(n, \frac{x}{a})$ est la discontinuité de déplacement en mode I ou II indifféremment. E est le module d'Young du matériaux.

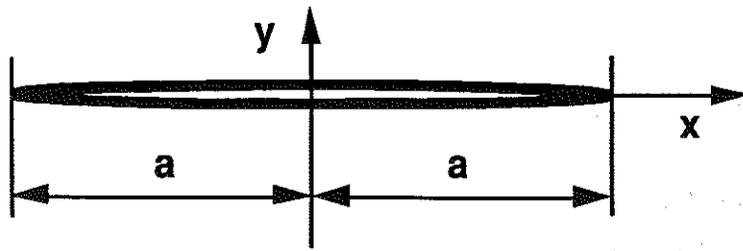


Figure A4. 2. 1 : repère lié à la fissure.

Sur la figure A4. 2. 3 on remarque que les efforts tangentiels induisent une déformation de la ligne moyenne de la fissure. U_y correspond au déplacement d'axe y des points se trouvant sur l'axe x et appartenant à la fissure.

A4. 2. 2. DEPLACEMENT A LA FRONTIERE D'UN MILIEU SEMI-INFINI POUR DES PRESSIONS POLYNOMIALES

La frontière est chargée entre $-a$ et $+a$ par des pressions normales et tangentiels réparties suivant des polynômes de Legendre. Sur les figures A4. 2. 3 à A4. 2. 13 u correspond au déplacement u_y porté par \vec{y} pour les traits pleins et au déplacement u_x porté par \vec{x} pour les traits pointillés. E est le module d'Young du matériau.

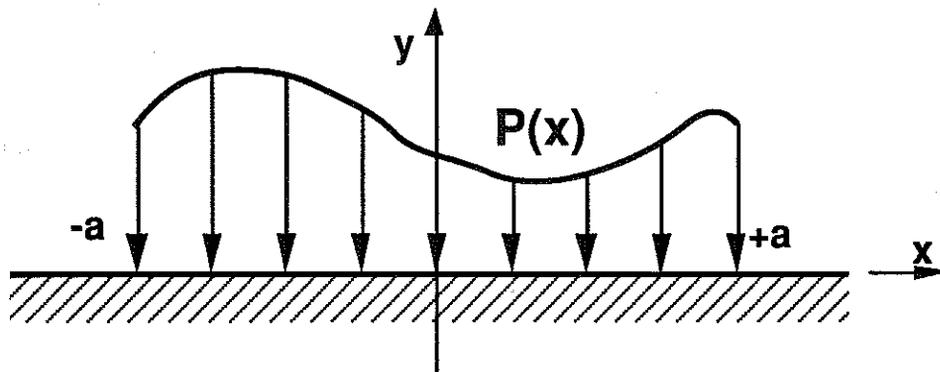
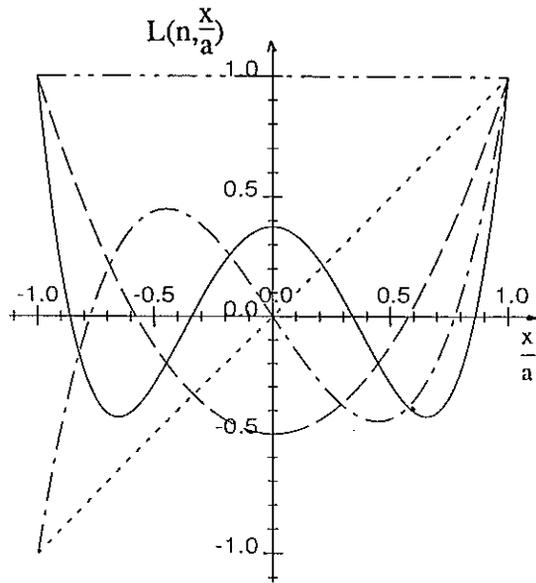


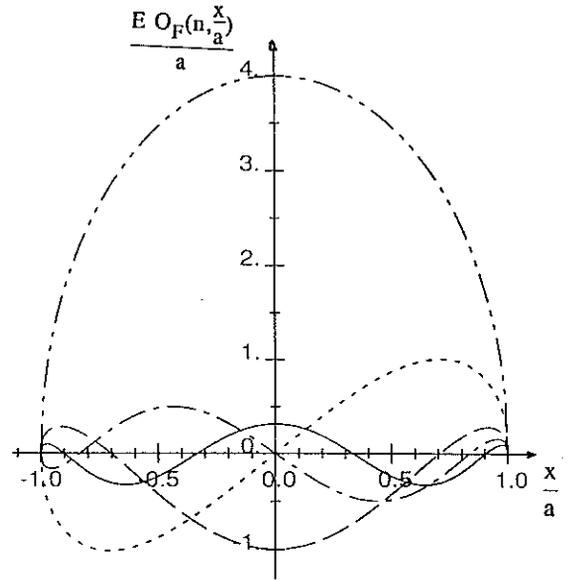
Figure A4. 2. 2 : efforts à la frontière d'un milieu semi-infini.

La zone d'influence de telles conditions aux limites est d'autant plus réduite que l'ordre est élevé. De ce fait lorsqu'on cherche à mieux décrire les pressions fictives sur une frontière du domaine en travaillant à un ordre plus élevé, on ne modifie que peu la solution ailleurs. On peut donc espérer se rapprocher de la solution exacte de cette façon.

LES CINQ PREMIERS ORDRES DES DEVELOPPEMENTS EN POLYNOMES DE LEGENDRE



polynomes de Legendre

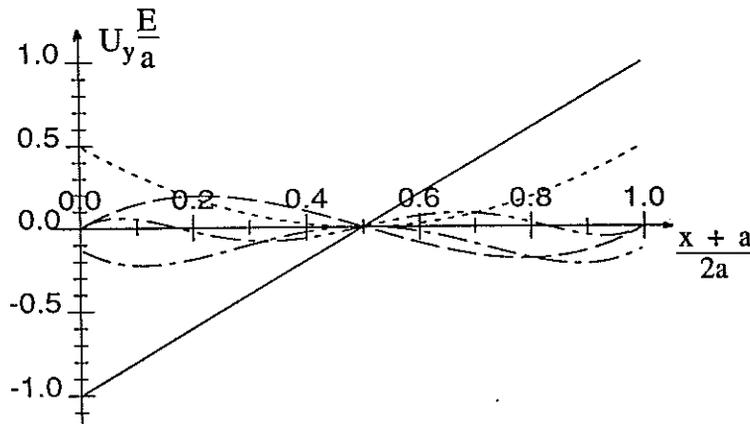


ouvertures de fissure correspondantes

Figure A4. 1. 1

ALLURE DE LA FISSURE DEFORMEE POUR LES CHARGEMENTS TANGENTIELS

- polynome de Legendre d'ordre 0
- polynome de Legendre d'ordre 1
- . - . - polynome de Legendre d'ordre 2
- polynome de Legendre d'ordre 3
- polynome de Legendre d'ordre 4



abscisse : abscisse du point de la fissure

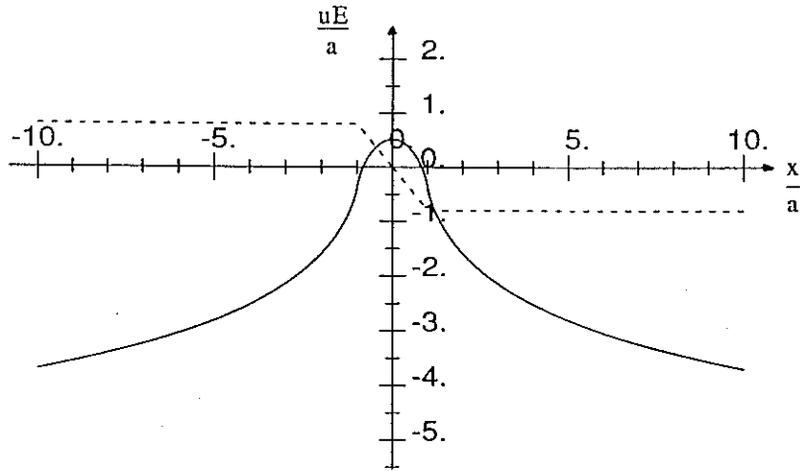
ordonnee : deplacements perpendiculaires a l'axe de la fissure

coefficient de poisson : 0.2

Figure A4. 2. 3

DEFORMEE DE LA SURFACE POUR LE POLYNOME D'ORDRE 0
 CHARGEMENT NORMAL ENTRE $X=-1$ ET $X=1$

————— déplacement axe y
 - - - - - déplacement axe x

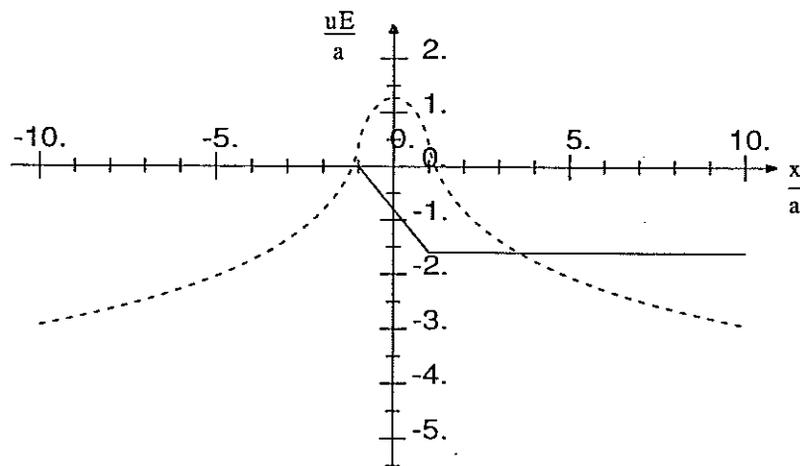


abscisse : abscisse du point de la frontiere
 ordonnee : déplacements du point de la frontiere
 coefficient de poisson : 0.2

Figure A4. 2. 4

DEFORMEE DE LA SURFACE POUR LE POLYNOME D'ORDRE 0
 CHARGEMENT TANGENTIEL ENTRE $X=-1$ ET $X=1$

————— déplacement axe y
 - - - - - déplacement axe x

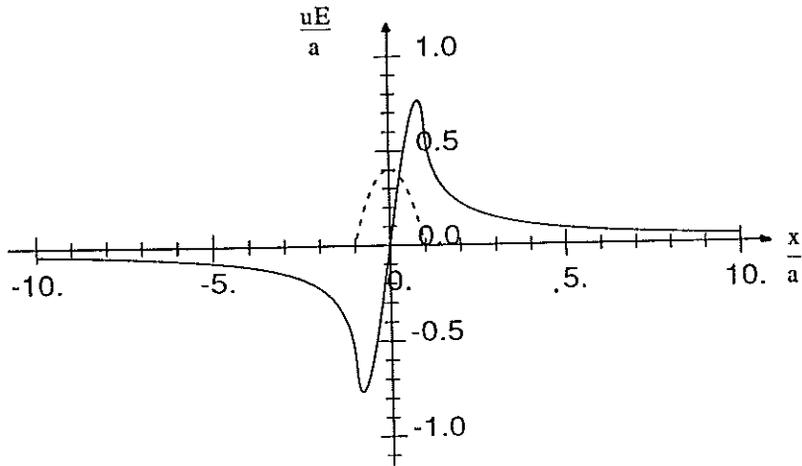


abscisse : abscisse du point de la frontiere
 ordonnee : déplacements du point de la frontiere
 coefficient de poisson : 0.2

Figure A4. 2. 5

DEFORMEE DE LA SURFACE POUR LE POLYNOME D'ORDRE 1
 CHARGEMENT NORMAL ENTRE X=-1 ET X=1

————— déplacement axe y
 - - - - - déplacement axe x

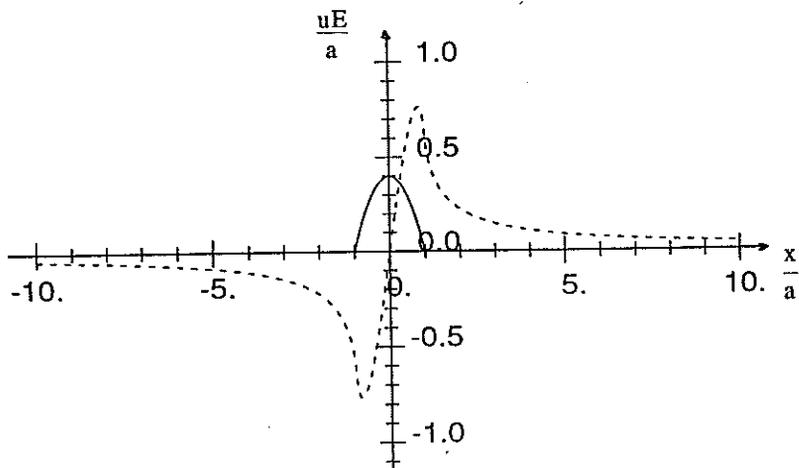


abscisse : abscisse du point de la frontiere
 ordonnee : déplacements du point de la frontiere
 coefficient de poisson : 0.2

Figure A4. 2. 6

DEFORMEE DE LA SURFACE POUR LE POLYNOME D'ORDRE 1
 CHARGEMENT TANGENTIEL ENTRE X=-1 ET X=1

————— déplacement axe y
 - - - - - déplacement axe x

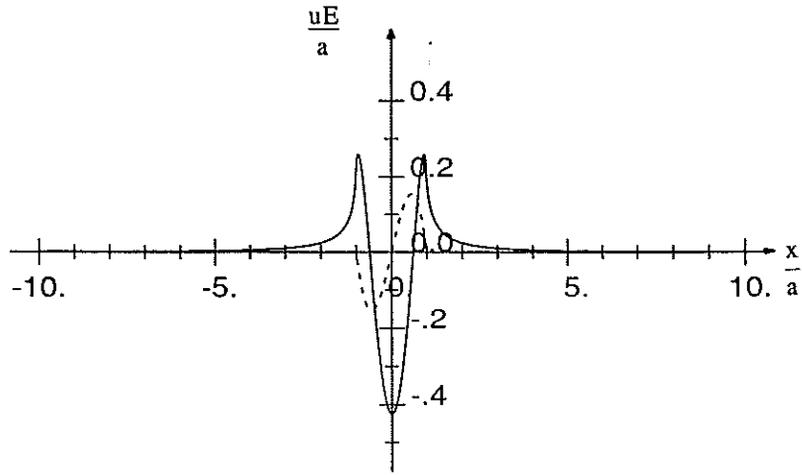


abscisse : abscisse du point de la frontiere
 ordonnee : déplacements du point de la frontiere
 coefficient de poisson : 0.2

Figure A4. 2. 7

DEFORMEE DE LA SURFACE POUR LE POLYNOME D'ORDRE 2
 CHARGEMENT NORMAL ENTRE X=-1 ET X=1

————— déplacement axe y
 - - - - - déplacement axe x

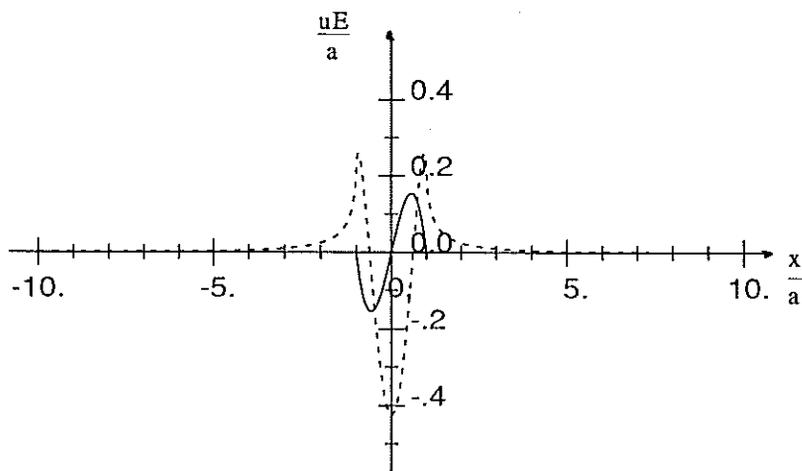


abscisse : abscisse du point de la frontiere
 ordonnee : déplacements du point de la frontiere
 coefficient de poisson : 0.2

Figure A4. 2. 8

DEFORMEE DE LA SURFACE POUR LE POLYNOME D'ORDRE 2
 CHARGEMENT TANGENTIEL ENTRE X=-1 ET X=1

————— déplacement axe y
 - - - - - déplacement axe x

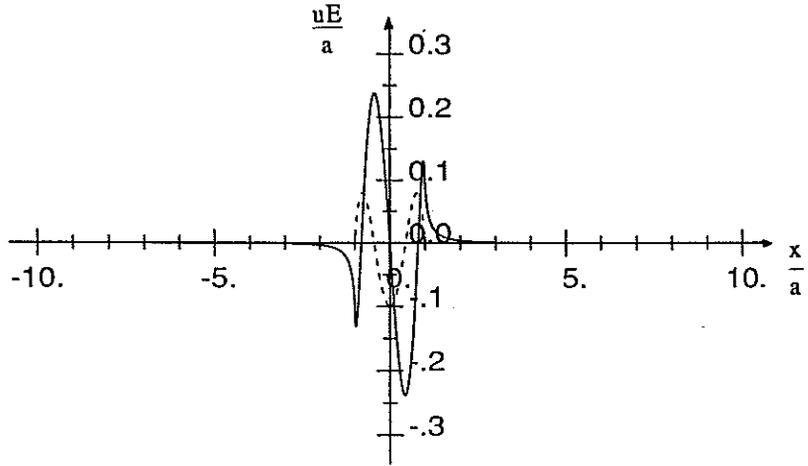


abscisse : abscisse du point de la frontiere
 ordonnee : déplacements du point de la frontiere
 coefficient de poisson : 0.2

Figure A4. 2. 9

DEFORMÉE DE LA SURFACE POUR LE POLYNOME D'ORDRE 3
 CHARGEMENT NORMAL ENTRE $X=-1$ ET $X=1$

————— déplacement axe y
 - - - - - déplacement axe x

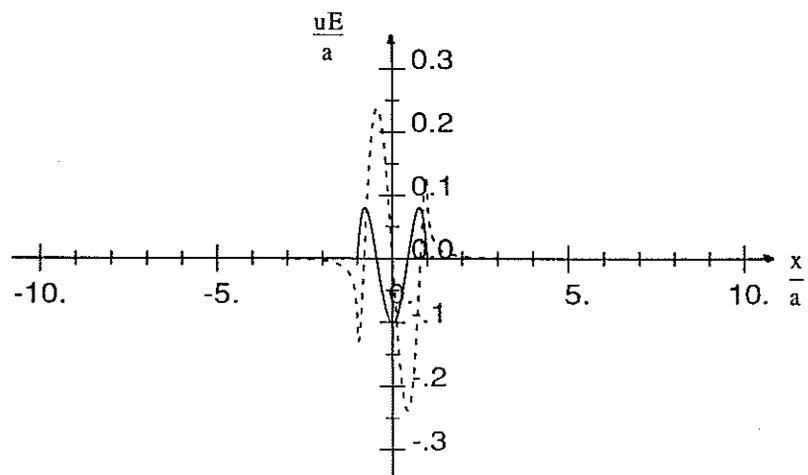


abscisse : abscisse du point de la frontiere
 ordonnee : déplacements du point de la frontiere
 coefficient de poisson : 0.2

Figure A4. 2. 10

DEFORMÉE DE LA SURFACE POUR LE POLYNOME D'ORDRE 3
 CHARGEMENT TANGENTIEL ENTRE $X=-1$ ET $X=1$

————— déplacement axe y
 - - - - - déplacement axe x

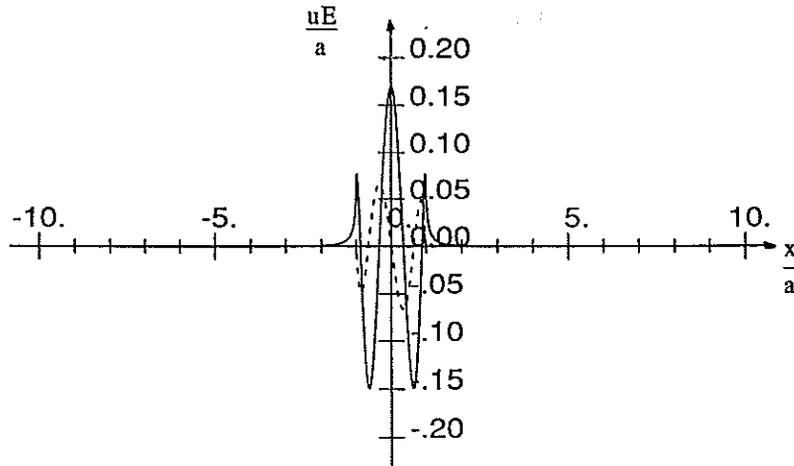


abscisse : abscisse du point de la frontiere
 ordonnee : déplacements du point de la frontiere
 coefficient de poisson : 0.2

Figure A4. 2. 11

DEFORMEE DE LA SURFACE POUR LE POLYNOME D'ORDRE 4
 CHARGEMENT NORMAL ENTRE X=-1 ET X=1

————— déplacement axe y
 - - - - - déplacement axe x

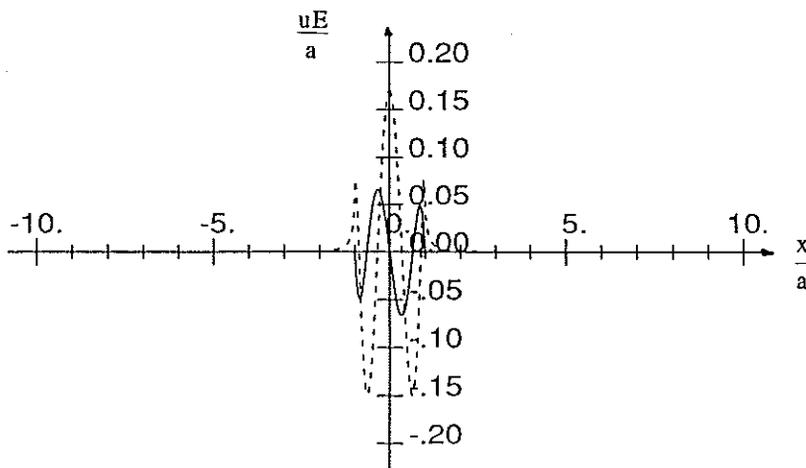


abscisse : abscisse du point de la frontiere
 ordonnee : déplacements du point de la frontiere
 coefficient de poisson : 0.2

Figure A4. 2. 12

DEFORMEE DE LA SURFACE POUR LE POLYNOME D'ORDRE 4
 CHARGEMENT TANGENTIEL ENTRE X=-1 ET X=1

————— déplacement axe y
 - - - - - déplacement axe x



abscisse : abscisse du point de la frontiere
 ordonnee : déplacements du point de la frontiere
 coefficient de poisson : 0.2

Figure A4. 2. 13

A4. 3. COUPLAGE AVEC UNE METHODE DE COLLOCATION

A4. 3. 1. METHODE DE COLLOCATION

A4. 3. 1. 1. PRINCIPE

Les méthodes de collocations permettent d'envisager des géométries de fissuration non rectilignes et sont plus souples que la méthode par superposition au niveau des conditions aux limites. Cependant le nombre d'inconnues introduites est presque toujours plus grand. Il est donc judicieux d'envisager de coupler les avantages des deux techniques pour étudier par exemple la progression d'une fissure courbe parmi des fissures droites.

Dans un milieu infini, on impose une discontinuité de déplacement sur un segment de longueur $2a$. Cette discontinuité est notée :

$$\hat{d} = \hat{u} + i \hat{v} \quad (\text{A4. 3. 1})$$

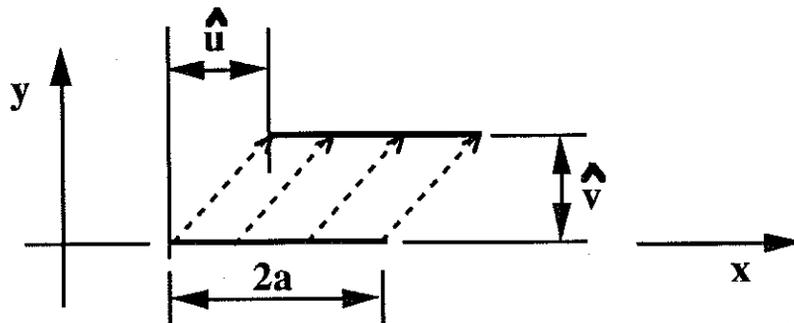


Figure A4. 3. 1 : discontinuité de déplacement d'ordre 0.

En exprimant les conditions de contraintes et rotations nulles à l'infini (équations de Plemelj) on aboutit à (voir par exemple [HENRY 82]) :

$$(k + 1) \psi(z) = \frac{\mu}{i\pi} \int_{-a}^a \frac{\hat{d}(t)}{t - z} dt \quad (\text{A4. 3. 2})$$

où μ est le module de cisaillement de Lamé.

A4. 3. 1. 2. DISCONTINUITÉ DE DÉPLACEMENT D'ORDRE 0

En prenant \hat{u} et \hat{v} constantes (ordre 0), le segment étant centré à l'origine, on obtient :

$$(k + 1) \psi(z) = \frac{\mu}{i\pi} \int_{-a}^a \frac{\hat{u} + i \hat{v}}{t - z} dt \quad (\text{A4. 3. 3})$$

Le potentiel complexe associé à cette "déformation" vaut :

$$\psi(z) = \frac{\mu \hat{d}}{2\pi(k+1)} \ln\left(\frac{z-a}{z+a}\right)$$

avec $k = (3 - 4\nu)$ en déformations planes et $k = \frac{(3 - \nu)}{(1 + \nu)}$ en contraintes planes. On calcul ensuite :

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \frac{\partial \psi(z)}{\partial z} \quad \text{et} \quad \phi'(z) = \frac{\partial \phi(z)}{\partial z} \\ \phi(z) &= \frac{2\mu \hat{d} a}{i\pi(k+1)(z^2 - a^2)} \\ \phi'(z) &= \frac{-4\mu \hat{d} a z}{i\pi(k+1)(z^2 - a^2)^2} \end{aligned} \quad (\text{A4. 3. 4})$$

Les contraintes dans le milieu sont données par :

$$\begin{cases} \sigma_{11} + \sigma_{22} = 2 [\phi(z) + \bar{\phi}(\bar{z})] \\ \sigma_{22} - i\sigma_{12} = \phi(z) + \phi(\bar{z}) + 2y\bar{\phi}'(\bar{z}) \end{cases} \quad (\text{A4. 3. 5})$$

et les déplacements sont fournis par :

$$2\mu(u + iv) = k\psi(z) - \psi(\bar{z}) - 2y\bar{\phi}'(\bar{z}) \quad (\text{A4. 3. 6})$$

On aboutit donc à l'expression du tenseur des contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = 2 [\phi(z) + \bar{\phi}(\bar{z})] - \text{Re} [\phi(z) + \phi(\bar{z}) + 2y\bar{\phi}'(\bar{z})] \\ \sigma_{12} = -\text{Im} [\phi(z) + \phi(\bar{z}) + 2y\bar{\phi}'(\bar{z})] \\ \sigma_{22} = \text{Re} [\phi(z) + \phi(\bar{z}) + 2y\bar{\phi}'(\bar{z})] \end{cases} \quad (\text{A4. 3. 7})$$

A4. 3. 2. APPLICATION AU CAS D'UNE FISSURE SOUS PRESSION

On considère des segments droits colinéaires de fissure d'axe x . Les contraintes au centre de chaque segment de fissure valent en déformations planes :

- la discontinuité de déplacement est appliquée au segment i , les contraintes au centre de ce segment i valent :

$$z=0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{11}^{ii} = \frac{-4 \mu \hat{v}}{\pi (k+1) a} \\ \sigma_{12}^{ii} = \frac{-4 \mu \hat{u}}{\pi (k+1) a} \\ \sigma_{22}^{ii} = \frac{-4 \mu \hat{v}}{\pi (k+1) a} \end{cases} \quad (\text{A4. 3. 8})$$

- la discontinuité de déplacement est appliquée au segment i , les contraintes au centre d'un autre segment j valent :

$$z=x_j \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{11}^{jj} = \frac{4 \mu \hat{v} a}{\pi (k+1) [(x_j - x_i)^2 - a^2]} \\ \sigma_{12}^{jj} = \frac{4 \mu \hat{u} a}{\pi (k+1) [(x_j - x_i)^2 - a^2]} \\ \sigma_{22}^{jj} = \frac{4 \mu \hat{v} a}{\pi (k+1) [(x_j - x_i)^2 - a^2]} \end{cases} \quad (\text{A4. 3. 9})$$

En contraintes planes $\frac{4 \mu}{(k+1)}$ est remplacé par $\frac{E}{2}$.

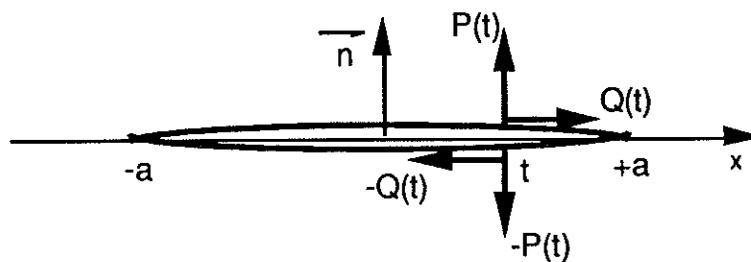


Figure A4. 3. 2 : fissure soumise à des pressions quelconques.

Le problème ainsi discrétisé, on écrira pour les N segments constituant la fissure :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \sigma_{22}^{ii} = -p_i \\ \sum_{i=1}^N \sigma_{12}^{ii} = -q_i \end{cases} \quad (\text{A4. 3. 10})$$

Les inconnues sont les \hat{u}_i et les \hat{v}_i et les p_i et q_i sont les conditions aux limites en contraintes normales et tangentielles aux lèvres de la fissure.

Cette technique utilisée avec 100 segments pour des pressions polynomiales de degrés inférieur à 5 donne de bons résultats comparables aux expressions analytiques (figure A4. 3. 3).

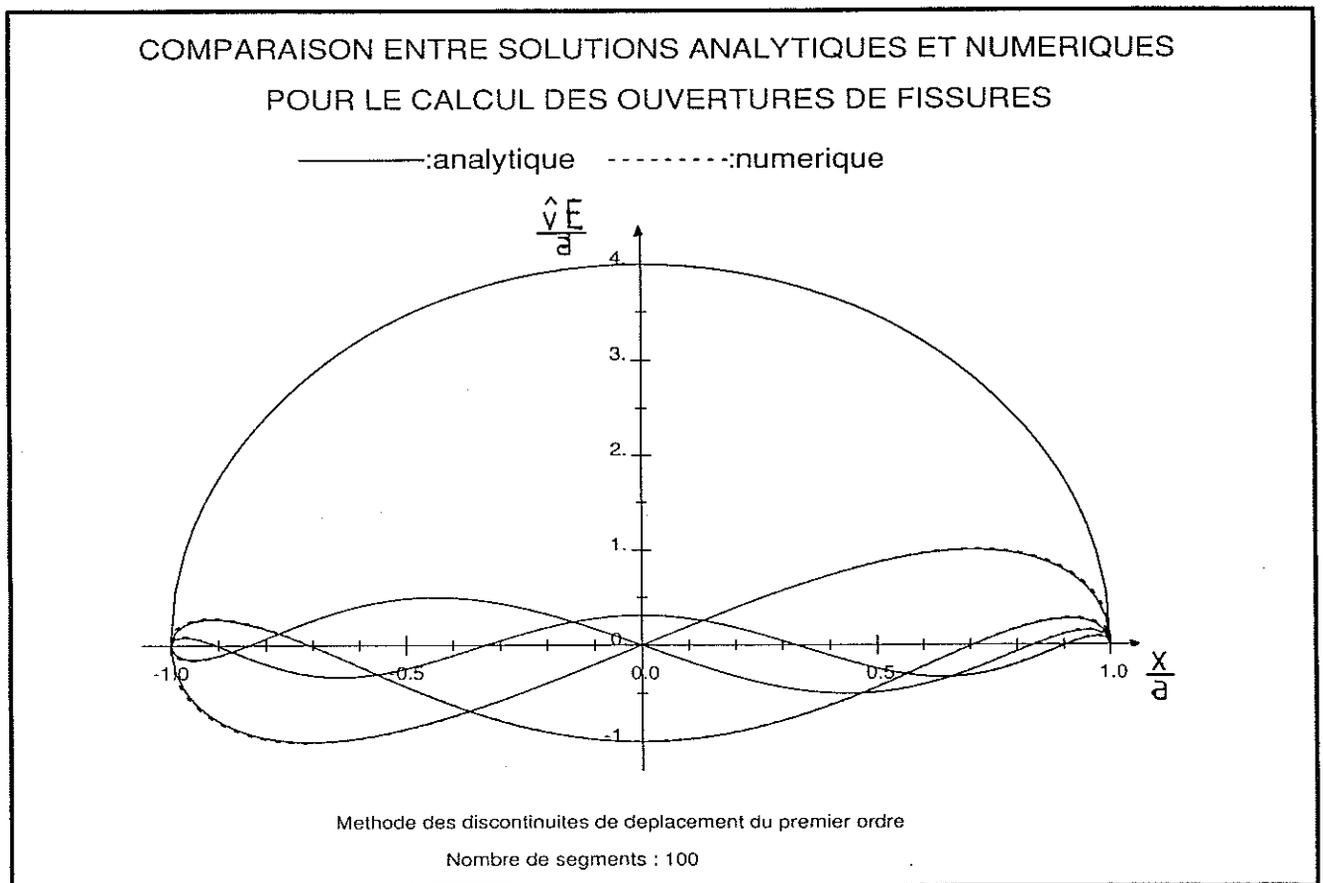


Figure A4. 3. 3 : discontinuités de déplacements.

A4. 3. 3. COUPLAGE AVEC LA METHODE PAR SUPERPOSITION

A4. 3. 3. 1. COMPATIBILITE

La connaissance des potentiels complexes associés aux discontinuités de déplacement permet de construire un opérateur linéaire du même type que les \mathcal{F}_{ij} , \mathcal{B}_{ij} et \mathcal{P}_{ij} rencontrés aux chapitres précédents. Sur les segments de fissures les inconnues sont les \hat{u}_i et les \hat{v}_i et sur les autres éléments les inconnues sont les $d(i,m,n)$ (notation du chapitre 1.). Les coefficients d'influence sont calculés de façon classique à l'aide des bibliothèques de fonctions (intégration numérique pour les éléments "par superposition" et calcul des contraintes aux centres des segments pour les éléments par discontinuité de déplacement.

Les segments peuvent être utilisés comme éléments de frontière à contrainte ou déplacement imposé. Dans ce cas les inconnues pour chaque segment i sont deux parmi les contraintes et déplacements \hat{u}_i , \hat{v}_i , p_i , et q_i , les deux autres valeurs constituant les conditions aux limites pour le segment considéré.

A4. 3. 3. 2. POSSIBILITES OFFERTES PAR UN TEL COUPLAGE

Des bibliothèques de fonctions ayant été développées (ou en cours de développement) pour certains types d'élément (fissures, pores, frontières) pour lesquels les expressions analytiques existent, l'utilisation de la méthode des discontinuités de déplacement pour ces éléments n'apporte pas d'amélioration (augmentation du nombre d'inconnues). Cependant, on peut obtenir des éléments de formes quelconques en utilisant cette dernière méthode.

Les potentiels complexes ont été évalués pour diverses formes de surface de discontinuité et pour des discontinuités de déplacement de diverses formes :

- segments de droite, discontinuité de déplacement :

déplacement polynomial :

$$\hat{d}(z) = \sum_{n=0}^P a_n z^n$$

éléments paraboliques en tête de fissure :

$$\hat{d}(z) = \gamma \sqrt{\ell-x} + i \gamma' \sqrt{\ell-x}$$

- segments de droite, discontinuité de contrainte :

contrainte polynomiale :

$$\hat{T}(z) = \sum_{n=0}^P a_n z^n$$

- arcs de cercle, discontinuité de déplacement :

éléments du second ordre :

$$\hat{d}(\theta) = \delta_0 + \delta_1 \cos(\theta) + i [\delta'_0 + \delta'_1 \cos(\theta)]$$

éléments dégénérés en fond de fissure :

$$\hat{d}(\theta) = \delta \sqrt{\alpha - \theta} + i \delta' \sqrt{\alpha - \theta}$$

- éléments coins, discontinuité de déplacement :

éléments du second ordre (voir figure A4. 3. 4).

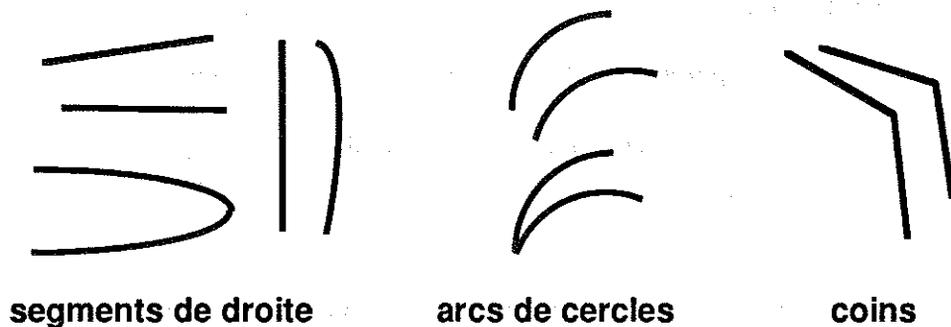


Figure A4. 3. 4 : illustration des discontinuités de déplacements.

Les expressions des potentiels complexes pour les arcs de cercles avec discontinuités de contraintes et les arcs d'ellipses n'ont pas encore été développées dans la littérature mais les éléments coins ont été testés [BOUHADDANE 87], [BELKACEMI 90].

A4. 3. 3. 3. CONCLUSION

Ce type de méthode a pour inconvénient de faire intervenir un nombre relativement important d'inconnues pour un seul élément en le discrétisant en "sous-éléments" (chaque fissure se décompose en plusieurs segments de droite par exemple) par rapport à la méthode de superposition qui considère chaque élément de façon globale. Par contre le calcul d'un coefficient d'influence nécessite plus d'opérations (environ 100 fois plus) par la technique de superposition (intégrations numériques pour les produits scalaires) que pour l'autre technique. Les éléments coins développés en collocation pourraient permettre d'améliorer la solution et le maillage pour les milieux finis.

Le couplage de ces méthodes d'influence offre donc la possibilité de quantifier les interactions entre de multiples fissures rectilignes et pores circulaires et un petit nombre de fissures non rectilignes. Ceci ouvre le domaine de l'étude de la propagation et progression de fissures.

A4. 4. COUPLAGE AVEC LES METHODES D'EQUATIONS INTEGRALES AUX FRONTIERES

A4. 4. 1. INTERET

La méthode de superposition décrit correctement la cinématique des discontinuités de déplacement et ne nécessite pas l'évaluation de valeurs aux proximités des singularités. Cependant, pour des milieux de formes complexes (formes non convexes) avec des conditions aux limites quelconques ou en présence de forces de volume, cette méthode n'offre pas la souplesse des techniques d'équations intégrales aux frontières. Pour des milieux comportant plusieurs fissures il est peut commode de scinder le domaine en plusieurs sous-domaines et peut précis de décrire les discontinuités de déplacement à l'aide de fonctions elliptiques d'ordre peut élevé.

Le couplage des deux techniques permettrait donc de limiter le nombre d'inconnues de problèmes de mécanique linéaire de la rupture tout en assurant une description correcte des champs de contraintes et de déplacement dans le milieu. Toutefois les structures tri-dimensionnelles ne se prêtent pas au couplage du fait des limitations de la technique par superposition. D'autre part, chaque coefficient de la matrice d'interaction nécessite un temps de calculs relativement long par superposition.

A4. 4. 2. PRINCIPE

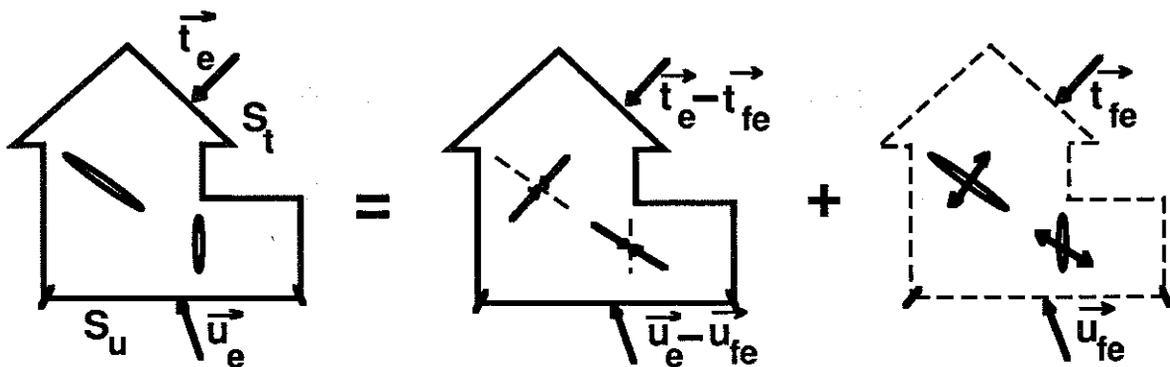


Figure A4. 4. 1 : décomposition d'un problème.

Le problème est décomposé en un problème 1 de domaine élastique linéaire non fissuré et un problème 2 de domaine infini multifissuré. Le problème 1 sera traité à l'aide du principe de réciprocité et de la solution de Kelvin pour une force ponctuelle unité appliquée dans un milieu infini. Le problème 2 sera traité à l'aide du principe de superposition et de toute les solutions relatives aux fissures.

A4. 4. 2. 1. METHODE D'EQUATIONS INTEGRALES AUX FRONTIERES

En appliquant le principe de réciprocité, on obtient des relations entre les inconnues du problème 1 et le vecteur contrainte le long des emplacements où se situent les fissures.

$$\mathbb{H} (\vec{U}_e - \vec{U}_{fe}) = \mathbb{G} (\vec{T}_e - \vec{T}_{fe}) \quad (\text{A4. 4. 1})$$

\vec{U}_e et \vec{U}_{fe} sont les vecteurs relatifs aux déplacements de la frontière du domaine. \vec{T}_e et \vec{T}_{fe} sont les vecteurs relatifs aux efforts appliqués à la frontière du domaine. \mathbb{H} est une matrice obtenue à l'aide de fonctions d'approximation pour évaluer des intégrales sur la frontière. Ces intégrales concernent le travail produit par les efforts fournis par la solution de Kelvin dans les déplacements du problèmes à résoudre. \mathbb{G} est aussi une matrice obtenue à l'aide de fonctions d'approximation pour évaluer des intégrales sur la frontière. Ces intégrales concernent le travail produit par les efforts du problème à résoudre fournis par la solution de Kelvin dans les déplacements fournis par la solution de Kelvin [BREBBIA 84].

On peut évaluer les contraintes dans le domaine dès qu'on connaît la solution à la frontière :

$$\begin{aligned} \vec{T}(m) \cdot \vec{t} &= -\vec{k}_t(m) \cdot (\vec{U}_e - \vec{U}_{fe}) + \vec{q}_t(m) \cdot (\vec{T}_e - \vec{T}_{fe}) \\ \vec{T}(m) \cdot \vec{n} &= -\vec{k}_n(m) \cdot (\vec{U}_e - \vec{U}_{fe}) + \vec{q}_n(m) \cdot (\vec{T}_e - \vec{T}_{fe}) \end{aligned} \quad (\text{A4. 4. 2})$$

où m représente par exemple un point du domaine appartenant à une fissure.

A4. 4. 2. 2. COUPLAGE AVEC LA METHODE DE SUPERPOSITION

En appliquant la méthode de superposition, on établit une relation entre les contraintes et déplacements en milieu infini et les pressions $d(i,m,n)$ dans les fissures. En conservant les notations du chapitre 1. :

$$\vec{U}_{fe} = \mathbb{F}_d \vec{D} \quad \text{et} \quad \vec{T}_{fe} = \mathbb{F}_c \vec{D} \quad (\text{A4. 4. 3})$$

Il faut ensuite décrire les efforts $\vec{T}(m)$ sur les fissures à l'aide de fonctions orthogonales pour évaluer le vecteur \vec{S} des conditions aux limites sur les lèvres des fissures. Pour cela il faut effectuer la projection sur la base choisie. Soit (L_1, \dots, L_p) cette base et a_i les longueurs de fissure :

$$s(i,1,n) = \frac{1}{\|L_n\|^2} \int_{-a_i}^{a_i} \vec{T}(m) \cdot \vec{n} \cdot L_n(m) \, dm$$

$$= \left[- \left(\int_{-a_i}^{a_i} \vec{k}_n(m) dm \right) (\vec{U}_e - \vec{U}_{fe}) + \left(\int_{-a_i}^{a_i} \vec{g}_n(m) dm \right) (\vec{T}_e - \vec{T}_{fe}) \right] \frac{1}{\|L_n\|^2} \quad (\text{A4. 4. 4})$$

On peut donc écrire la relation entre les pressions fictives dans les fissures et les conditions aux frontières :

$$\vec{D} = \mathfrak{K} (\vec{U}_e - \vec{U}_{fe}) + \mathfrak{L} (\vec{T}_e - \vec{T}_{fe}) \quad (\text{A4. 4. 5})$$

On obtient ainsi autant d'équations que d'inconnues et on peut construire un système linéaire. La prise en compte du frottement nécessiterait une convergence sur la valeur du vecteur de frottement de la même façon qu'avec la méthode de superposition.

A4. 4. 3. COMMENTAIRES

La précision d'une telle technique reste à déterminer. La matrice obtenue sera non symétrique et pleine. Les coefficients d'influence relatifs aux fissures ainsi que les vecteurs des conditions aux limites nécessitent des intégrations numériques donc un temps de calcul relativement long. Les singularités au voisinage des frontières ne sont pas traitées par cette technique.

DETERMINATION DES SURFACES

SEUIL DE PREMIERE

PROPAGATION

5. DETERMINATION DES SURFACES SEUIL DE PREMIERE PROPAGATION

5. 1. INTERET

Pour construire un modèle d'endommagement cohérent avec les phénomènes mésomécaniques mis en jeu, il convient de connaître les effets de chaque paramètre des mécanismes inclus dans le modèle et ceci de façon indépendante. On peut dans ce cadre comparer les surfaces de rupture expérimentales et celles des modèles mésomécaniques afin de dégager les paramètres principaux qui régissent la ruine d'un matériaux.

La technique de superposition exposée ici fournit un outil adapté à l'étude des influences des densités de fissures, des orientations préférentielles de fissures, des densités de pores, de la présence de bords libres de contrainte, du coefficient de frottement sur les allures des surfaces de première propagation, et ceci en tenant en compte des interactions.

Bien sûr, ce type d'étude a aussi pour but de savoir dans quelles mesures, les éléments mésomécaniques introduits (pores, fissures, frottement) peuvent suffire à régir le comportement macroscopique et la localisation.

5. 2. CONSTRUCTION D'UNE SURFACE SEUIL DE PREMIERE PROPAGATION

5. 2. 1. CRITERE DE RUPTURE

Le critère le plus simple pour connaître le point de propagation est de comparer le facteur d'intensité des contraintes en mode I à une valeur supposée critique pour le matériau. Ce critère quoique facile à mettre en oeuvre numériquement ne satisfait pas les lois de la physique puisqu'il ne tient pas compte du bilan énergétique ni de la présence de mode II [BUI 83]. Il sera néanmoins utile de fournir des résultats au titre de la comparaison.

Lorsqu'une fissure se propage, la géométrie du milieu change et sa rigidité évolue. L'énergie élastique dans le milieu subit une variation de même que l'énergie dissipée s'il y a frottement. Schématiquement, si F représente l'effort extérieur et U le déplacement du point d'application de F , pour un matériau linéaire élastique fragile en chargement radial, on aura pour un incrément de déplacement Δu provoqué par la propagation (figure 5. 1).

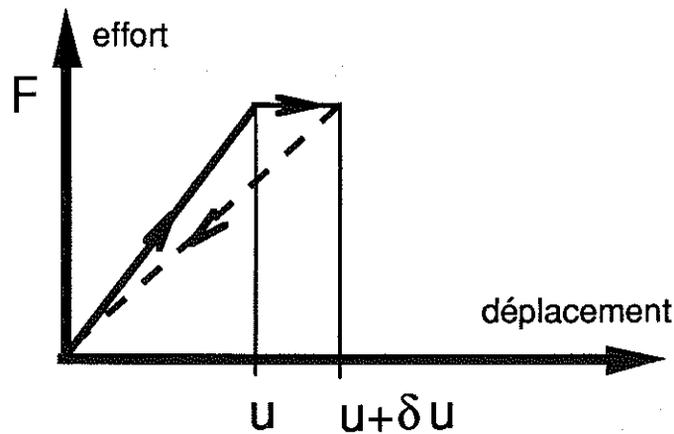


Figure 5. 1 : restitution d'énergie.

Le frottement faisant intervenir l'histoire du matériau (chargement et propagation), la décharge pourra s'effectuer sur un trajet non linéaire. Notre étude consiste à prédire à quelle extrémité de fissure il y aura propagation. Pour cela on peut procéder à une propagation fictive de chaque extrémité de fissure d'une valeur Δa très petite afin de déterminer les énergies élastiques et dissipées avant et après propagation.

Pour Δa petit, on peut admettre que la décharge est quasiment linéaire et ainsi traiter les problèmes en chargements radiaux.

Exemple de bilan énergétique en absence de frottement pour une évolution quasi-statique :

$$\frac{1}{2} F u + F \Delta u - \frac{1}{2} F (u + \Delta u) = \frac{1}{2} F \Delta u = G \quad (5. 2. 1)$$

La différence entre l'énergie fournie à la structure et celle restituée montre que $\frac{1}{2} F \Delta u$ contribue à une éventuelle augmentation d'énergie dissipée et à une création de surface correspondant à Δa . Si R est l'énergie nécessaire pour créer la surface Δa , D l'énergie dissipée lors de la création de Δa et de G la différence entre le supplément d'énergie fournie et le supplément d'énergie élastique, on peut appliquer le schéma de Griffith : on aura rupture dès que l'égalité suivante sera atteinte en un point du matériau :

$$R + D = G \quad (5. 2. 2)$$

5. 2. 2. POSSIBILITE D'APPROXIMATION - CAS DE LA FISSURE SEULE EN MILIEU INFINI

5. 2. 2. 1. VALIDITE DE L'HYPOTHESE

En raison de la technique de résolution utilisée, les fissures se propageront en ligne droite. Bien que la rigueur nécessite d'envisager des bifurcations de fissures on observe expérimentalement que les fissures sont souvent droites. Tant que les couplages avec une méthode de collocation (ou autre) ne seront pas effectués il nous faudra nous contenter de ce modèle simpliste de propagation.

En toute rigueur, afin d'évaluer G et D il faut effectuer deux calculs prenant en compte l'histoire du matériau ; un premier avec la géométrie initiale, un second où une extrémité de fissure s'est propagée de Δa , le point de départ étant l'état évalué au premier calcul. Lorsque les interactions sont faibles, on peut envisager d'effectuer un seul calcul pour savoir à quelle extrémité de fissure le critère est atteint. Pour de faibles interactions, on peut en effet considérer que la propagation d'une fissure affecte peu l'état d'ouverture des fissures voisines et évaluer G et D comme si la fissure était seule en milieu infini. Le tracé de la surface seuil de propagation peut ainsi être extrêmement rapide par rapport au calcul rigoureux pour des milieux multifissurés.

5. 2. 2. 2. TAUX DE RESTITUTION D'ENERGIE

Energie élastique avant et après propagation

En supposant la décharge linéaire, on pourra évaluer la différence d'énergie élastique dans le domaine à l'aide des expressions (3. 2. 11).

Considérons la fissure avant et après propagation : la fonction de pression fictive $p(x)$ est prolongée sur Δa par continuité (figure 5. 2). Lorsqu'il y a propagation côté $x > 0$ la fissure est chargée par $p(x + \Delta/2)$ de $a - \Delta/2$ à $a + \Delta/2$. Lorsqu'il y a propagation côté $x < 0$ la fissure est chargée par $p(x - \Delta/2)$.

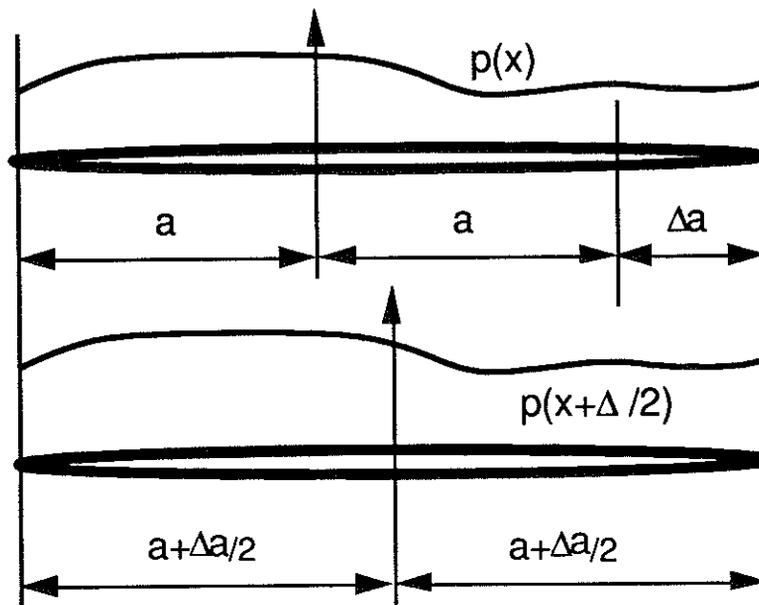


Figure 5. 2 : propagation d'une fissure.

Pour nos applications, $p(x)$ est décomposé en polynômes de Legendre. Afin d'utiliser les expressions établies au chapitre 3. on cherche à décrire la fonction $p(x + \Delta/2)$ sur "la nouvelle fissure" à l'aide des polynômes de Legendre. Si il y a propagation en fin de fissure (côté +1) alors les pressions fictives dans les fissures valent pour l'ordre n : $L(n, x(1 + \Delta/2) + \Delta/2)$ avec $x \in [-1, +1]$. On obtient en négligeant les termes d'ordre supérieur en facteur de $\Delta^2, \Delta^3, \Delta^4$:

$$L(0, x(1 + \Delta/2) + \Delta/2) = L(0, x)$$

$$L(1,x (1 + \Delta/2) + \Delta/2) = L(1,x) + \frac{\Delta}{2} L(1,x) + \frac{\Delta}{2} L(0,x)$$

$$L(2,x (1 + \Delta/2) + \Delta/2) = L(2,x) + \Delta L(2,x) + \frac{3\Delta}{2} L(1,x) + \frac{\Delta}{2} L(0,x)$$

$$L(3,x (1 + \Delta/2) + \Delta/2) = L(3,x) + \frac{3\Delta}{2} L(3,x) + \frac{5\Delta}{2} L(2,x) + \frac{3\Delta}{2} L(1,x) + \frac{\Delta}{2} L(0,x)$$

$$L(4,x (1 + \Delta/2) + \Delta/2) = L(4,x) + \frac{\Delta}{2} L(4,x) + \frac{7\Delta}{2} L(3,x) + \frac{5\Delta}{2} L(2,x) + \frac{3\Delta}{2} L(1,x) + \frac{\Delta}{2} L(0,x)$$

Les expressions précédentes seront mises pour la suite sous la forme :

$$L(n,x (1 + \Delta/2) + \Delta/2) = L(n,x) + \sum_{i=0}^n a_{ni} L(i,x) \quad (5. 2. 3)$$

Avec l'hypothèse de décharge radiale, on peut utiliser une formule du type (3. 2. 11) pour évaluer l'énergie élastique W_{el} après propagation pour la fissure i.

$$W_{el} = \frac{a^2 (1 + \frac{\Delta}{2})^2}{2} \int_{-1}^1 \sum_{\ell=0}^p \sum_{n=0}^p \sum_{m=1}^2 [s(i, m, \ell) \{ L(\ell,x) + \sum_{j=0}^{\ell} \Delta a_{\ell j} L(j,x) \} \\ * d(i,m,n) \{ \hat{v}_n^L(x) + \sum_{i=0}^n \Delta a_{ni} \hat{v}_i^L(x) \} dx]$$

En négligeant les termes en Δ^2 l'expression précédente prend la forme :

$$W_{el} = \frac{a^2 (1 + \frac{\Delta}{2})^2}{2E} \left[\sum_{\ell=0}^p \sum_{n=0}^p \sum_{m=1}^2 (s(i, m, \ell) d(i,m,n) \{ \omega_{n\ell} + \sum_{i=0}^n \Delta a_{ni} \omega_{ni} + \sum_{j=0}^{\ell} \Delta a_{\ell j} \omega_{\ell j} \}) \right] \quad (5. 2. 4)$$

où les $d(i,m,n)$ sont définis au paragraphe (1. 6. 1.).

On évalue ensuite le taux de restitution d'énergie :

$$\text{en posant : } g_{n\ell} = \omega_{n\ell} + \sum_{i=0}^n \Delta a_{ni} \omega_{ni} + \sum_{j=0}^{\ell} \Delta a_{\ell j} \omega_{\ell j}$$

$$\text{on obtient : } \left(\frac{\partial W_{el}}{\partial \Delta} \right)_{\Delta=0} = G_{fin} = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=0}^p \sum_{\ell=0}^p \frac{a}{2E} \{ d(i,m,n) s(i,m,\ell) g_{n\ell} \} \quad (5. 2. 5)$$

On peut ainsi évaluer le taux de restitution d'énergie pour une propagation rectiligne en fin de fissure à l'aide de la seule connaissance des pressions fictives $d(i,m,n)$ dans cette fissure.

Le taux de restitution d'énergie "en début de fissure" sera obtenu de la même façon en prenant en compte l'antisymétrie des polynômes d'ordre impair :

$$G_{\text{début}} = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=0}^P \sum_{\ell=0}^P \frac{a}{2E} \left\{ d(i,m,n) \mathfrak{S}(i,m,\ell) (-1)^{(n+\ell)} g_{n\ell} \right\}$$

Pour les polynômes de Legendre les valeurs des $g_{n\ell}$ sont:

$g_{n\ell}$	$\ell=0$	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$
$n=0$	2π	π	$3\pi/2$	$13\pi/8$	$107\pi/64$
$n=1$		$\pi/4$	$\pi/2$	$9\pi/2$	$39\pi/64$
$n=2$				$17\pi/32$	$529\pi/1024$
$n=3$		symétrique		$57\pi/512$	$51\pi/128$
$n=4$					$243\pi/1024$

Tableau 5. 1 : taux de restitution d'énergie associé aux polynômes de Legendre.

5. 2. 2. 3. AUTRE METHODE (ESHELBY)

Lorsque la fissure se propage de Δa les efforts $p(r)$ travaillent dans les déplacements liés à l'ouverture de la fissure. Lorsqu'on libère p , la fissure s'ouvre sur Δa . On peut totalement découpler les modes I et II puisqu'il y a orthogonalité des efforts et des déplacements.

Pour le mode I ou II, on a donc pour la fin de la fissure i par exemple :

$$p(r) = \frac{K_F \sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \quad (5. 2. 6)$$

avec $K_F = \sum_{n=0}^P K_{nF} d(i,m,n)$ si l'on conserve les notations du paragraphe 1. 6. 2. .

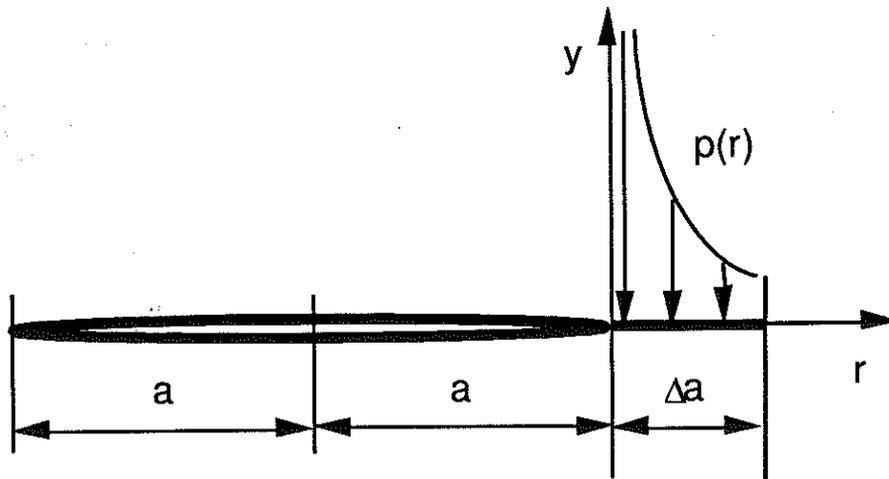


Figure 5. 3 : efforts en fond de fissure.

Exemple à l'ordre 0

Le travail des $p(r)$ s'effectue dans les déplacements liés à la discontinuité de déplacement du fond de fissure. En se reportant au paragraphe 4. 1. 5. on s'aperçoit que $\hat{V}_0^L(x)$ peut se mettre sous la forme :

$$\hat{V}_0^L(x) = \frac{a + \Delta a/2}{E} \sqrt{1 - \left(\frac{x - \Delta a/2}{a + \Delta a/2}\right)^2}$$

Bilan énergétique du cas de la figure 5. 4 :

Energies élastiques :

1. $W_{el 1} = \frac{1}{2} \int_{S_{ext}} F u ds$

2. $W_{el 2} = \frac{1}{2} \int_{S_{ext}} F(u + \Delta u) ds$

Energies fournies :

1. $W_{f 1} = \int_{S_{ext}} \frac{1}{2} F u ds$

2. $W_{f 1} = \int_{S_{ext}} \frac{1}{2} F u + F \Delta u ds$

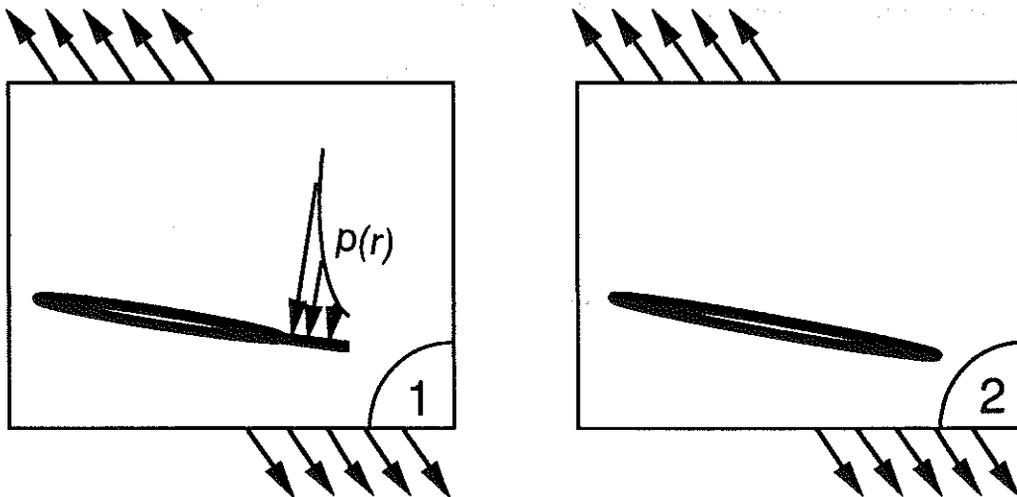


Figure 5. 4 : efforts fournissant un travail pendant la propagation.

Taux de restitution d'énergie :

$$G = W_{f 2} - W_{el 2} = \frac{1}{2} \int_{S_{ext}} F \Delta u ds \quad (5. 2. 7)$$

Par réciprocity, on montre que :

$$G = -\frac{1}{2} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_0^{\Delta a} p(r) v(r) dr \quad (5.2.8)$$

Ceci est valable pour un milieu multifissuré tant qu'il n'y a pas de frottement. Dès que du frottement apparaît, il convient d'évaluer l'énergie qui se dissipe pendant la création de Δa .

Facteurs d'intensité des contraintes :

En utilisant les expressions des potentiels complexes pour obtenir la contrainte en fond de fissure, on obtient le facteur du terme singulier qui, par définition, est le facteur d'intensité des contraintes. En posant $z = a + r$ on obtient pour les monômes au voisinage de $r = 0$:

$$\text{Ordre 0 : } \sigma(r) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} - 1 = \frac{K_0}{\sqrt{2\pi r}} - 1 \quad \text{donc } K_{F0} = \sqrt{\pi a}$$

$$\text{Ordre 1 : } \sigma(r) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} - \frac{(r+a)}{a} \quad \text{donc } K_{F1} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi a}$$

$$\text{Ordre 2 : } \sigma(r) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} - \frac{(r+a)^2}{a^2} \quad \text{donc } K_{F2} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi a}$$

$$\text{Ordre 3 : } \sigma(r) = \frac{3}{8} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} - \frac{(r+a)^3}{a^3} \quad \text{donc } K_{F3} = \frac{3}{8} \sqrt{\pi a}$$

$$\text{Ordre 4 : } \sigma(r) = \frac{3}{8} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} - \frac{(r+a)^4}{a^4} \quad \text{donc } K_{F4} = \frac{3}{8} \sqrt{\pi a}$$

(5.2.9)

Les polynômes de Legendre étant pairs et impairs, on a pour le "début" de fissure :

$$K_{Dn} = (-1)^n K_{Fn}$$

$$K_0 = \sqrt{\pi a} ; K_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\pi a} ; K_2 = \left(\frac{3}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi a} = \frac{1}{4} \sqrt{\pi a}$$

$$K_3 = \left(\frac{5}{2} \frac{3}{8} - \frac{3}{2} \frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi a} = \frac{3}{16} \sqrt{\pi a} ; K_4 = \left(\frac{35}{4} \frac{3}{8} - \frac{30}{8} \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \cdot 1\right) \sqrt{\pi a} = \frac{9}{64} \sqrt{\pi a}$$

En effectuant le changement de repère : $x = r + a$, on aboutit à :

$$v_0^L(r) = \frac{1}{E} \sqrt{2a(\Delta a - r)} \quad (5.2.10)$$

On cherche à évaluer : $G = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{W_{\Delta a}}{\Delta a}$

à l'ordre 0 :

$$G_0 = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} -\frac{1}{2} \hat{v}_0^L(r) p(r) dr \quad (5.2.11)$$

Le calcul de cette limite donne : $G_0 = \frac{\pi a}{E}$

Termes d'ordres supérieurs :

On remarque que pour les termes d'ordre impair, on ne peut utiliser les expressions $\hat{v}_n^L(x)$ du paragraphe 4. 1. 4. car elles ne sont pas valables au voisinage de $x = a$. En effet, en posant $z = a - r + \varepsilon i$, on obtiendra l'expression de $\hat{v}(x)$ au voisinage de a pour $r \rightarrow 0$ et $\varepsilon \rightarrow 0$ où r et ε sont liés par une relation a priori inconnue.

En postulant que $\hat{v}_n^L(n) = b_n \sqrt{r}$ au voisinage de a on identifiera b_n en utilisant :

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} -\frac{1}{2} \frac{b_n \sqrt{\Delta a - r}}{\sqrt{r}} K_{Fn} dr = G_n \quad (5.2.12)$$

5.2.2.4 TAUX DE DISSIPATION

Avec le même principe que pour le taux de restitution d'énergie, on cherche la différence entre la dissipation avant et après ouverture. Les fonctions (frottement et pressions fictives) sont prolongées par continuité sur la longueur propagée. Les énergies dissipées avant propagation D_1 et après propagation D_2 sont :

$$D_1 = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \left[\sum_{n=0}^P d(i,2,n) \hat{v}_n^L(x) \sum_{\ell=0}^P f(i,\ell) L(\ell, \frac{x}{a}) \right] dx$$

$$D_2 = \frac{1}{2} \int_{-a-\Delta/2}^{a+\Delta/2} \left[\sum_{n=0}^P d(i,2,n) \{ \hat{v}_n^L(x) + \sum_{i=0}^n \Delta a_{ni} \hat{v}_i^L(x) \} \right. \\ \left. * f(i,\ell) \left\{ L(\ell, \frac{x}{a+\Delta/2}) + \sum_{j=0}^{\ell} \Delta a_{\ell j} L(j, \frac{x}{a+\Delta/2}) \right\} \right] dx$$

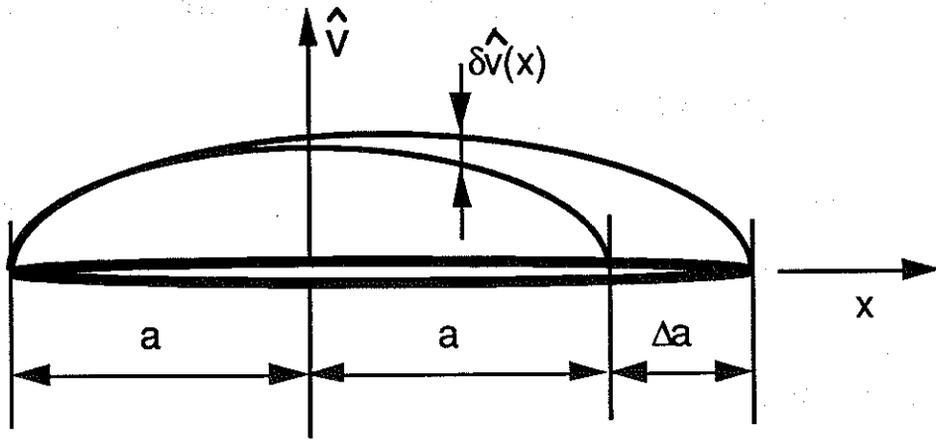


Figure 5. 5 : évolution de la discontinuité d'ouverture.

d'où le taux de dissipation \mathcal{D} (voir 5. 2. 2. 2.):

$$\mathcal{D} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{D_2 - D_1}{\Delta} \right) = \sum_{n=0}^P \sum_{\ell=0}^P \frac{a}{2E} g_{n\ell} d(i,2,n) f(i,\ell) \quad (5. 2. 13)$$

\mathcal{D} correspond au travail des efforts de frottement dans le déplacement parallèle à la fissure $\delta u(x)$. \mathcal{D} sera positif ou nul. Pour une propagation côté $x < 0$ ("début" de fissure) on aura :

$$g_{n\ell}^- = (-1)^{n+\ell} g_{n\ell} \quad (5. 2. 14)$$

Pour une fissure i chargée par les pressions tangentielles fictives $d(i,2,n)$ et au frottement $f(i,n)$ à l'ordre p , on aura pour le côté "fin" de la fissure :

$$D_f = \sum_{n=0}^P \sum_{\ell=0}^P \frac{a}{2E} g_{n\ell} d(i,2,n) f(i,\ell) \quad (5. 2. 15)$$

Pour une fissure i chargée par les pressions tangentielles fictives $d(i,2,n)$ et au frottement $f(i,n)$ à l'ordre p , on aura pour le côté "début" de la fissure :

$$D_d = \sum_{n=0}^P \sum_{\ell=0}^P \frac{a}{2E} (-1)^{n+\ell} g_{n\ell} d(i,2,n) f(i,\ell) \quad (5. 2. 16)$$

5. 3. CONSTRUCTION D'UNE SURFACE SEUIL DE PREMIERE PROPAGATION

5. 3. 1. VALIDITE DES APPROXIMATIONS

Au paragraphe 5. 2. 2. 3. on montre que G ne peut pas être évalué à l'aide des informations sur la seule fissure concernée quand des efforts de frottement (considérés comme extérieurs) apparaissent. Il en est de même pour le taux de dissipation. Soit i une fissure parmi N , \hat{v}_j représentant des discontinuités d'ouverture en mode II et f_j les frottements, le taux D_i de dissipation dans la fissure i vaut pour l'extrémité "fin" par exemple :

$$D_i = \int_{a_{di}}^{a_{fi}} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial a_{fi}} f_i dx_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \int_{a_{dj}}^{a_{fj}} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial a_{fi}} f_j dx_j \quad (5. 3. 1)$$

or on a une relation de proportionnalité entre \hat{v}_j et p_j (p_j représente les pressions tangentielles fictives dans les fissures j). U est une fonction définie par :

$$\frac{\partial \hat{v}_j}{\partial a_{fi}} = U\left(\frac{\partial p_j}{\partial a_{fi}}\right) \quad \text{où } U(0) = 0$$

on aura donc (ceci vaut aussi pour G_i):

$$\text{Si } \forall j \neq i : \frac{\partial p_j}{\partial a_{fi}} \approx 0 \Rightarrow D_i \approx \int_{a_{di}}^{a_{fi}} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial a_{fi}} f_i dx_i \quad (5. 3. 2)$$

5. 3. 2. TECHNIQUE DE CONSTRUCTION EN CHARGEMENT RADIAL

Un chargement radial peut être paramétré par λ , α et β tels que :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \lambda \cos \alpha \cos \beta \\ \sigma_{12} = \lambda \sin \beta \\ \sigma_{22} = \lambda \sin \alpha \sin \beta \end{cases} \quad (5. 3. 3)$$

Dans ce cas, avec l'hypothèse pré-citée de déchargement radial, on a par exemple pour la fin de fissure :

$$D_{if} \text{ proportionnel à } \lambda^2$$

$$G_{if} \text{ proportionnel à } \lambda^2$$

Si d_{ij} et g_{ij} sont évalués pour $\lambda = 1$, on peut exprimer la valeur λ_p de λ au seuil de propagation en fonction de la ténacité R :

$$\lambda_p(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{R}{g_{if} - d_{if}}} \quad (5.3.4)$$

Dans le cas où (5.3.2) est valable, une seule matrice d'interaction est évaluée donc les valeurs de λ_p sont calculées rapidement.

5. 4. CAS D'UNE SEULE FISSURE OU UN SEUL PORE EN MILIEU INFINI

5. 4. 1. BUT DE L'ETUDE

Notre modèle permet d'étudier les interactions entre fissures, pores et bords avec frottement dans les fissures. Dans la mesure où l'on cherche à tracer des surfaces seuils de première propagation afin d'étudier en interaction l'influence des paramètres du modèle, il convient de connaître l'influence de chaque paramètre sans interactions pour des comparaisons utiles.(voir annexes).

En plaçant une fissure ou un pore seul en milieu infini on simule un milieu avec des défauts très "dilués" (distants). La surface seuil de première propagation ou début de rupture est pour ces milieux le domaine commun à toutes les surfaces seuils élémentaires.

Même si nos paramètres ne suffisent pas à décrire tous les phénomènes liés à la rupture (fissures branchées, fissures d'interface, inclusions ...), il faut toutefois donner des valeurs vraisemblables au coefficient de frottement, à la ténacité, à la contrainte maximale admissible au voisinage d'un pore (σ_{max}). Ceci peut-être envisagé en comparant les formes et les tailles des surfaces seuils ainsi construites avec des surfaces seuils expérimentales.

5. 4. 2. FISSURE AVEC FROTTEMENT SEULE EN MILIEU INFINI

5. 4. 2. 1. PLAN (σ , τ)

En se reportant à l'expression (3. 2. 11) et en supposant le chargement uniforme sur la fissure, on obtient lorsque la fissure est fermée et non bloquée pour le taux de dissipation :

$$D = \frac{\Pi a}{E} (-\varphi \sigma) |\tau_{eff}| \quad (5. 4. 1)$$

en conservant les notations du chapitre 2. R concernant la prise en compte du frottement

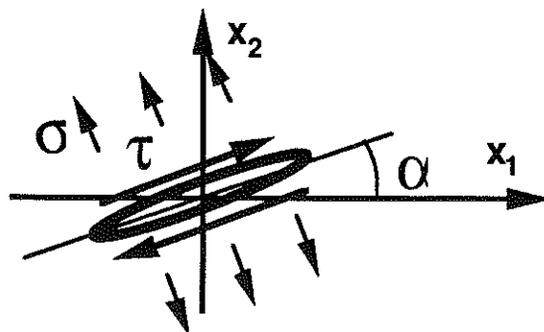


Figure 5. 6 : contrainte normale et cisaillement dans le repère de la fissure.

Pour $\sigma < 0$, que vaut le taux de dissipation ?

$$D = \frac{\Pi a}{E} (-\varphi \sigma) (|\tau| + \varphi \sigma) \quad \text{si } |\tau| > -\varphi \sigma \quad (5.4.2)$$

Le taux de restitution d'énergie vaut dans ce cas.

$$G = \frac{\Pi a}{E} (\sigma^2 + \tau_{\text{eff}}^2)$$

On rappelle que :

Cas 1 : si $\sigma > 0$ $\tau_{\text{eff}} = \tau$. La fissure est ouverte.

Cas 2 : si $\sigma < 0$ et $|\tau| > -\varphi \sigma$ $|\tau_{\text{eff}}| = |\tau| + \varphi \sigma$. La fissure frotte.

Cas 3 : si $\sigma < 0$ et $|\tau| < -\varphi \sigma$ $\tau_{\text{eff}} = 0$. La fissure est bloquée et $D = 0$ dans ce cas.

Il y aura propagation pour : $R = G - D$

Ce qui donne :

$$\text{Cas 1 : } R = \frac{\Pi a}{E} (\sigma^2 + \tau^2) \quad (5.4.3)$$

$$\text{Cas 2 : } R = \frac{\Pi a}{E} [(|\tau| + \varphi \sigma)^2 - (-\varphi \sigma) (|\tau| + \varphi \sigma)] \quad (5.4.4)$$

$$\text{Cas 3 : } R = 0$$

On obtient ainsi une relation entre σ et τ : en posant $k = \frac{R E}{\Pi a}$.

Cas 1 : $\sigma^2 + \tau^2 = k$ relation qui définit un cercle de rayon \sqrt{k} .

$$\text{Cas 2 : } \tau = \pm \frac{\varphi}{2} \left(-3\sigma - \sqrt{\sigma^2 + \frac{4k}{\rho^2}} \right) \quad (5.4.5)$$

Valeurs asymptotiques : pour $\sigma \rightarrow -\infty$ on a $\tau \simeq \pm 2\varphi \sigma$.

Cas 3 : le domaine de blocage est défini par $\tau = \pm \varphi \sigma$.

Remarque : le domaine compris entre le domaine de blocage et le domaine de rupture correspond au cas où la fissure se déforme sous l'action du cisaillement mais l'énergie dissipée pour une propagation serait telle que l'énergie fournie par le travail des efforts extérieurs ne suffirait pas à satisfaire à l'augmentation d'énergie élastique, à la création de surface et à cette dissipation.

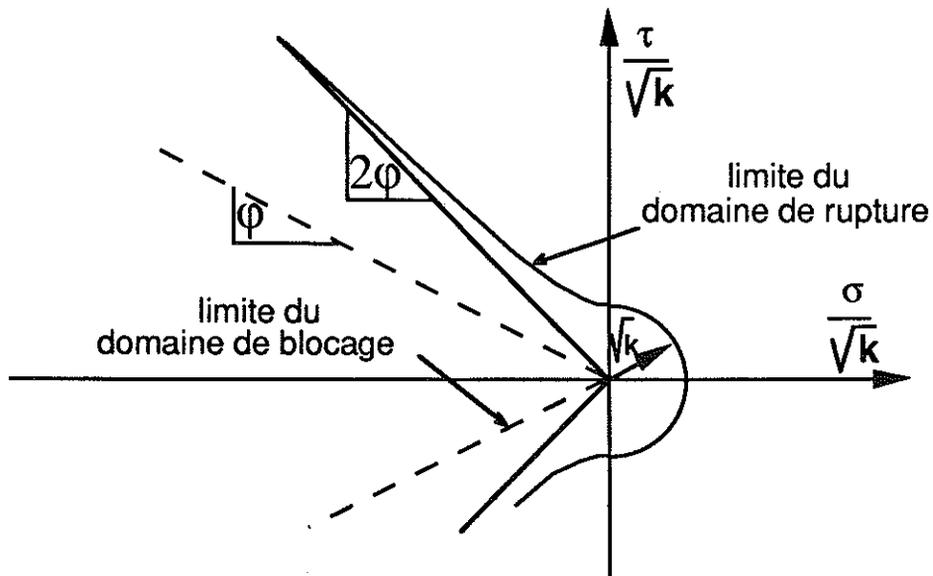


Figure 5. 7 : surface seuil de première propagation dans le repère lié à la fissure.

5. 4. 2. 2. PLAN $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$

La transcription des résultats précédents dans le plan $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$ s'effectue à l'aide de :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{\cos 2\alpha}{2} (\sigma_{22} - \sigma_{11}) - \frac{\sin 2\alpha}{2} \sigma_{12} \\ \tau = \frac{\sin 2\alpha}{2} (\sigma_{22} - \sigma_{11}) + \frac{\cos 2\alpha}{2} \sigma_{12} \end{cases} \quad (5. 4. 6)$$

On supposera $\sigma_{12} = 0$ pour la suite.

Cas 1 : $\sigma_{22} > \sigma_{11}$ ($-\tan^2 \alpha$)

Ce domaine est donc délimité par une droite de pente $-\tan^2 \alpha$.

La surface de première propagation a pour équation :

$$\sigma_{22}^2 \cos^2 \alpha + \sigma_{11}^2 \sin^2 \alpha = k \quad (5. 4. 7)$$

On tracera dans le domaine défini par le cas 1 une ellipse centrée à l'origine et de rapport d'axe $\tan^2 \alpha$

Cas 2 : $\sigma_{22} < \sigma_{11} (-\text{tg}^2 \alpha)$

$$\tau > 0 \Rightarrow \sigma_{11} < 0$$

$$\text{et } \sigma_{22} > \sigma_{11} \frac{1 + \varphi \text{tg } \alpha}{1 - \varphi \text{cotg } \alpha} \quad \text{si } \alpha \in [0, \frac{\Pi}{2}]$$

$$\text{ou } \sigma_{22} < \sigma_{11} \frac{1 + \varphi \text{tg } \alpha}{1 - \varphi \text{cotg } \alpha} \quad \text{si } \alpha \in [\frac{\Pi}{2}, \Pi] \quad (5.4.8)$$

On pose :

$$\begin{cases} C_a = 2 \varphi \cos \alpha + \sin \alpha \\ C_b = \varphi \cos \alpha + \sin \alpha \\ C_c = \varphi \sin \alpha - \cos \alpha \end{cases}$$

La solution devra respecter les critères (5.4.8) et ne devra pas appartenir au domaine de non propagation ; elle vaut :

$$\sigma_{22} = \frac{-\sigma_{11} \sin \alpha (2C_a C_c + \varphi) \pm \sqrt{(\sigma_{11} \varphi \sin \alpha)^2 + 4k C_a C_b}}{2 \cos \alpha C_a C_b} \quad (5.4.9)$$

Il en est de même pour :

$$\tau < 0 \Rightarrow \sigma_{22} < 0$$

$$\text{et } \sigma_{22} > \sigma_{11} \frac{1 - \varphi \text{tg } \alpha}{1 + \varphi \text{cotg } \alpha} \quad \text{si } \alpha \in [0, \frac{\Pi}{2}]$$

$$\text{ou } \sigma_{22} < \sigma_{11} \frac{1 - \varphi \text{tg } \alpha}{1 + \varphi \text{cotg } \alpha} \quad \text{si } \alpha \in [\frac{\Pi}{2}, \Pi] \quad (5.4.10)$$

On pose dans ce cas :

$$\begin{cases} C'_a = 2 \varphi \cos \alpha - \sin \alpha \\ C'_b = \varphi \cos \alpha - \sin \alpha \\ C'_c = \varphi \sin \alpha + \cos \alpha \end{cases}$$

$$\sigma_{22} = \frac{-\sigma_{11} \sin \alpha (2 C'_a C'_c - \varphi) \pm \sqrt{(\varphi \sigma_{11} \sin \alpha)^2 + 4k C'_a C'_b}}{2 \cos \alpha C'_a C'_b} \quad (5.4.11)$$

De façon analogue au plan (τ, σ) , k n'apparaît pas dans l'expression des pentes des asymptotes dans le domaine des bi-compressions.

Droites asymptotiques dans le domaine des bi-compressions :

Lorsque $\sigma_{11} \rightarrow -\infty$ ou $\sigma_{22} \rightarrow -\infty$, on peut évaluer l'angle α_c de la fissure pour lequel la pente de la droite supérieure du seuil de propagation (de pente $A \in [0,1)$) sera maximum. Par raison de symétrie on aura une pente $\frac{1}{A}$ pour la droite inférieure et $\alpha'_c = -\alpha_c$. Cette fissure d'angle α_c ou $-\alpha_c$ sera donc la première à propager si elle existe dans le matériau, quelle que soit sa longueur. Le plan final de rupture sera d'angle $+\alpha_c$ ou $-\alpha_c$ avec l'axe x_1 .

Bien sûr, en réalité on ne peut obtenir de très grandes valeurs pour σ_{11} ou σ_{22} puisque d'autres mécanismes de ruines existent dans les matériaux. La longueur de la fissure qui initie la rupture pour ce schéma de ruine intervient d'autant plus que σ_{11}^2 est petit, (voir les expressions (5. 4. 9) et (5. 4. 11) mais on peut supposer qu'elle va s'orienter suivant α_c au cours de sa propagation.

Les figures A5. 1. 3 et A5. 1. 4 donnent pour une population de fissures de même taille avec équirépartition en angle, la pente de l'asymptote (celle comprise entre 0 et 1), et l'angle du plan de rupture sur cette asymptote pour les états de bi-compression importante en fonction du coefficient de frottement (sans interaction).

5. 5. EFFONDREMENT DES PORES

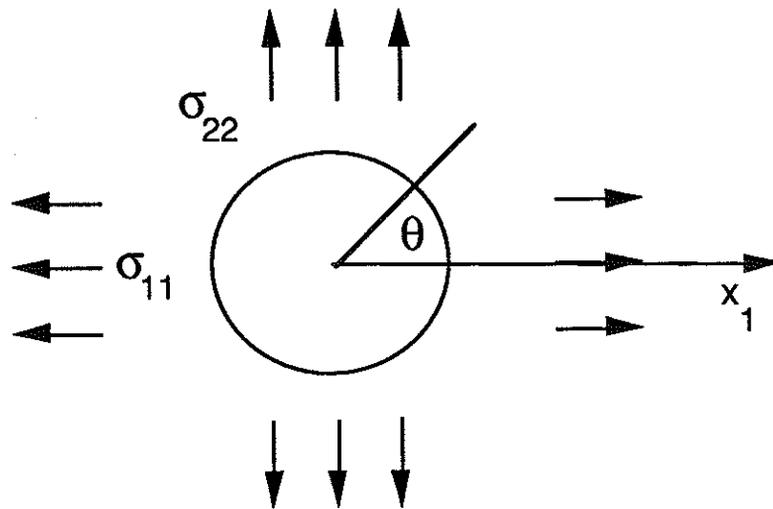


Figure 5. 8 : cavité circulaire soumise à des contraintes de traction-compression.

Pour un pore circulaire en milieu infini :

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{11} (1 - 2 \cos 2\theta) + \sigma_{22} (1 + 2 \cos 2\theta) \quad (5. 5. 1)$$

$$\sigma_{\theta\theta} \max = \sigma_{11} + \sigma_{22} + 2 |\sigma_{11} - \sigma_{22}| \text{ pour } \begin{cases} \theta = 0 \text{ si } \sigma_{22} > \sigma_{11} \\ \theta = \frac{\Pi}{2} \text{ si } \sigma_{11} > \sigma_{22} \end{cases}$$

Critère en contrainte admissible : si l'on admet que la rupture est atteinte en compression pour $\sigma_{\min} > 0$ tel que $\min(\sigma_{\theta\theta}) = -\sigma_{\min}$ il n'y a pas de rupture tant que $\min(\sigma_{\theta\theta}) > -\sigma_{\min}$. C'est à dire :

$$\begin{aligned} \sigma_{22} > \sigma_{11} & \quad \sigma_{22} > \frac{-\sigma_{\min} + \sigma_{11}}{3} \\ \sigma_{22} < \sigma_{11} & \quad \sigma_{22} < \sigma_{\min} + 3\sigma_{11} \end{aligned} \quad (5. 5. 2)$$

Si l'on admet une rupture en traction pour $\sigma_{\max} > 0$ tel que $\max(\sigma_{\theta\theta}) \max = \sigma_{\max}$, il n'y a pas de rupture tant que $\max(\sigma_{\theta\theta}) < \sigma_{\max}$. C'est à dire :

$$\begin{aligned} \sigma_{22} > \sigma_{11} & \quad \sigma_{22} < \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{11}}{3} \\ \sigma_{22} < \sigma_{11} & \quad \sigma_{22} > -\sigma_{\max} + 3\sigma_{11} \end{aligned} \quad (5. 5. 3)$$

Au total le domaine serait un parallélogramme..

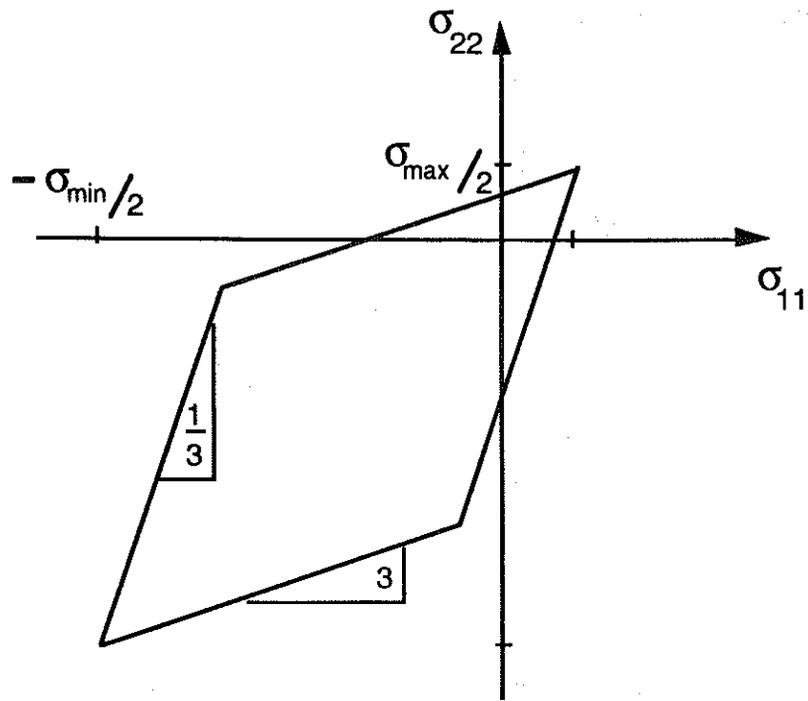


Figure 5. 9 : surface de rupture pour un pore seul en milieu infini avec un critère de contrainte maximale.

5. 6. IDENTIFICATIONS

Sans prétendre décrire la totalité des mécanismes de ruine, les défauts de matière utilisés ici peuvent permettre de constituer un matériau modèle. La comparaison entre la forme des surfaces de rupture expérimentales et celles du modèle peut donner des informations sur les ordres de grandeurs des paramètres utilisés, pour autant que les mécanismes de ruine incriminés soient en concordance avec la réalité. Le coefficient de frottement peut être connu si l'on

mesure α_c et calcule $\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}}$, σ_{\min} et σ_{\max} définissent la taille de la surface seuil sur la première bissectrice. Si les surface seuils de rupture expérimentales et théoriques concordent (s'il existe des droites du type droites asymptotiques sur une partie du domaine en bi-compression), on connaît alors des mécanismes suffisants mais non forcément nécessaires qui régissent le comportement à rupture.

A titre d'exemple la figure 5. 11 donne la forme de diverses surfaces seuils expérimentales et issues de modèles de comportement [MAZARS 84] [TORRENTI 87] [VAN MIER 84]. Ces surfaces seuils peuvent être des surfaces seuils d'endommagement ou de rupture. Le lien avec les surfaces seuils de première propagation n'est pas direct mais il est permis d'utiliser le maximum d'informations lorsque les identifications sont indirectes. Si le souci des modèles de comportement macroscopique est de refléter le comportement réel, malgré les difficultés d'identifications il en doit en être de même pour les modèles à l'échelle inférieure. Des informations qualitatives extraites des essais rendront les modèles mésoscopiques cohérents.

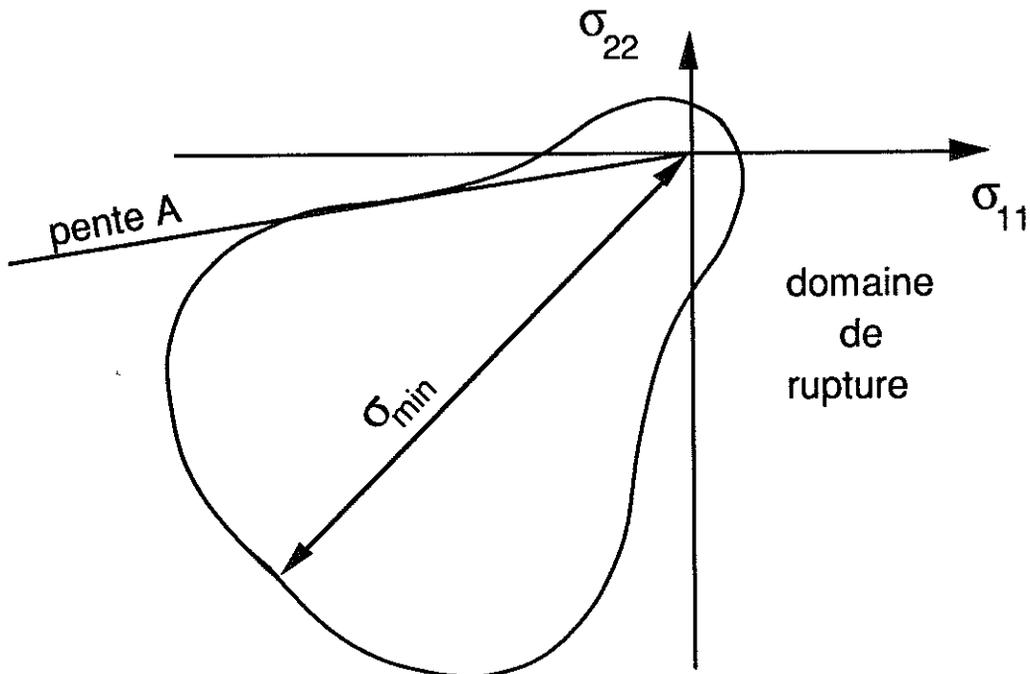
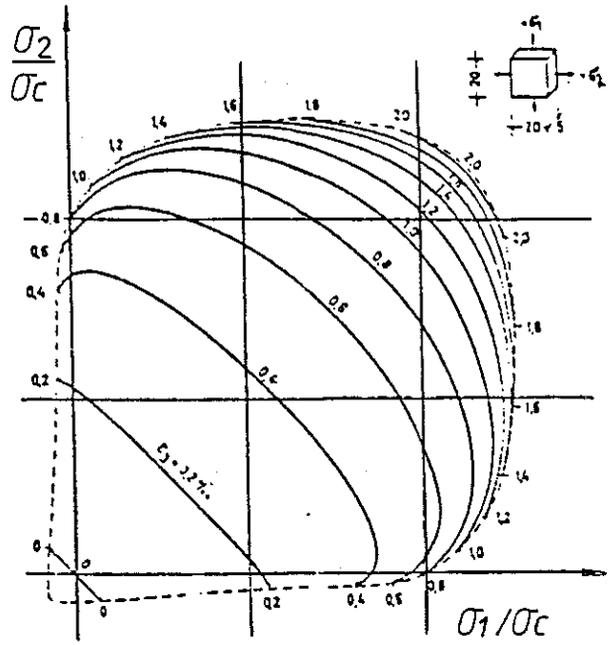
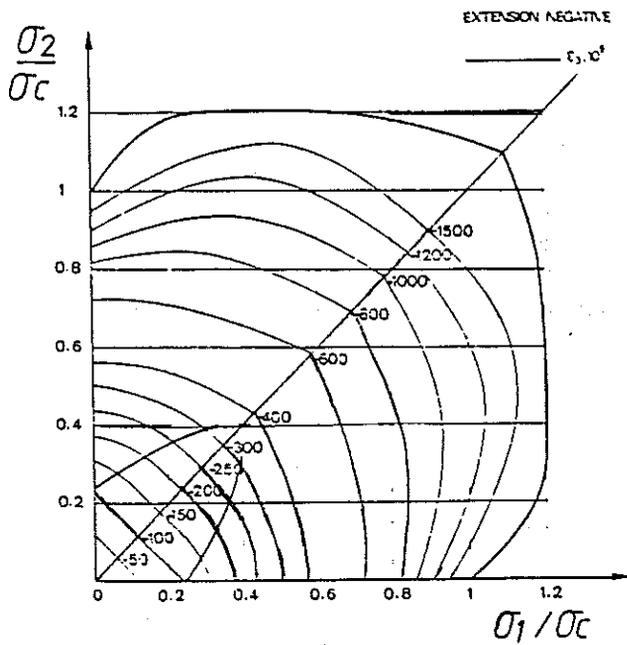


Figure 5. 10 : allure possible d'une surface de rupture expérimentale pour du béton.

Le coefficient de frottement englobe en fait tout ce qui gêne le mouvement relatif de 2 lèvres de fissure en contact (rugosité de la surface, sinuosité de la fissure...). Ceci pourra faire l'objet d'une étude particulière. Notre modèle de fissures rectilignes sera donc rendu réaliste si la valeur est adaptée à la simulation d'essais réels.



Extrait de [TORRENTI 87] p.186

Extrait de [VAN MIER 84] p. 265

Figure 5. 11 : surfaces seuils expérimentales et issues de modèles de comportement.

Extrait de [MAZARS 84] p. 183

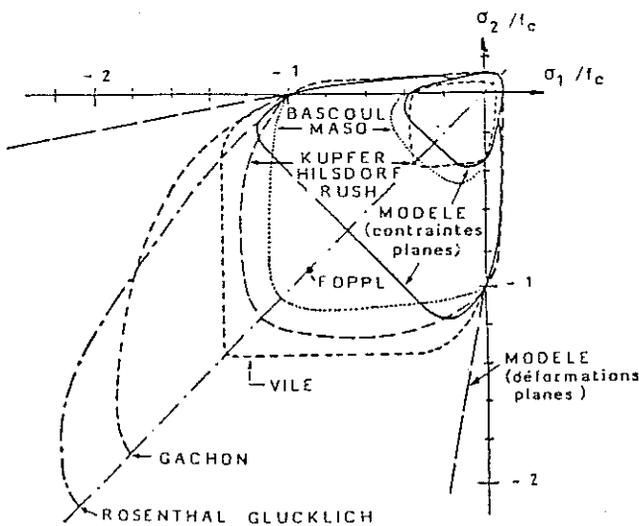


Figure B.56 Comparaisons résultats expérimentaux - modèle dans le plan $\sigma_3 = 0$

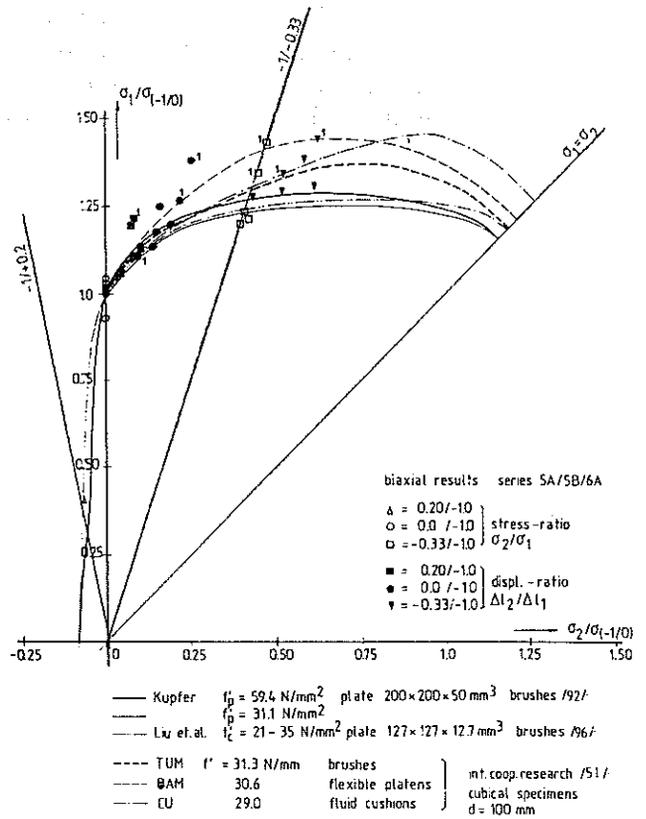


Fig. A4.J. Comparison of biaxial strength results with previous investigations.

Il s'agit d'une trace "virtuelle" obtenue en reportant les contraintes à rupture σ_1, σ_2 lorsque $\epsilon_3 = 0$

5. 7. AMELIORATION DU MODELE

5. 7. 1. LACUNES ESSENTIELLES

L'étude préliminaire faite ici ne constitue qu'un outil permettant l'analyse des résultats obtenus avec les seuls "ingrédients" dont nous disposons pour l'instant. Il est en effet reconnu que les fissures d'interface pour les matériaux granulaires ainsi que le "branchement" des fissures participent à la ruine des matériaux à matrice fragile. La présence d'inclusions de caractéristiques mécaniques différentes de celles de la matrice joue un rôle primordial dans les phénomènes de diffusion-localisation.

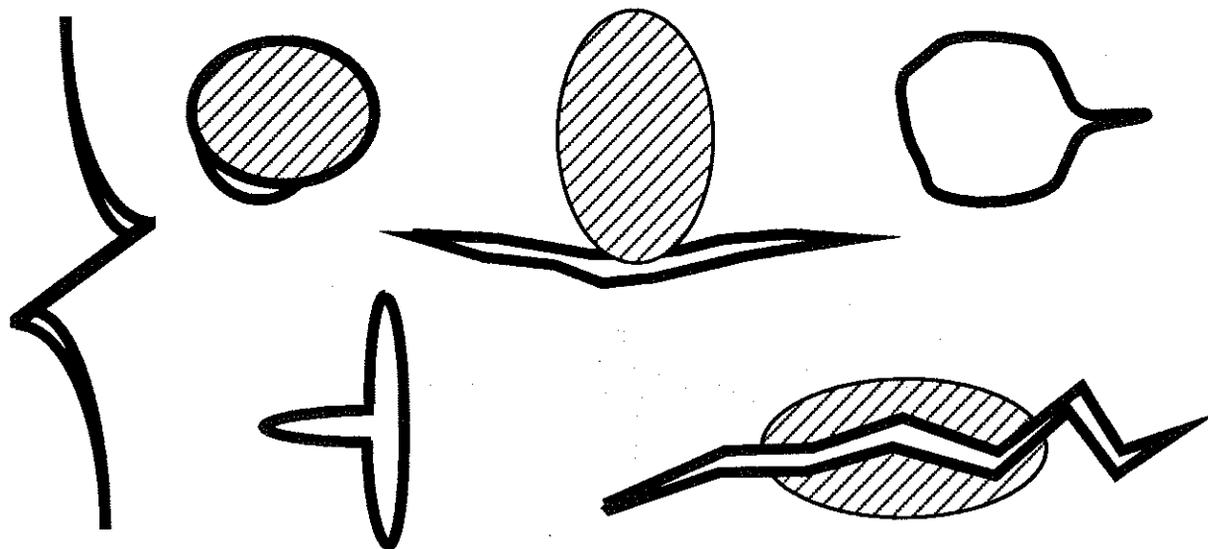


Figure 5. 12 : mécanismes manquants aux modèles possibles avec la méthode de superposition.

Il peut être envisagé sur la base de l'outil de calcul existant de prendre en compte l'effet d'inclusions infiniment dures de façon aisée. L'inclusion élastique circulaire pourra ensuite être implantée moyennant la transcription de la continuité des contraintes et déplacements à l'interface au niveau de l'algorithme de calcul.

Le cas de la fissure d'interface devra ensuite faire l'objet d'une étude de faisabilité.

5. 7. 2. POTENTIELS COMPLEXES POUR DES FISSURES "BRANCHEES"

S. Nemat-Nasser et H. Horii [NEMAT 82] ou M.F. Ashby et S.D. Hallam [HALLAM 86] par exemple on traite le problème de la fissuration parallèle à l'axe de compression avec un modèle de fissure branchée où le coefficient de frottement intervient dans la partie centrale. Il serait intéressant de pouvoir intégrer ce type de fissuration dans nos modèles afin de simuler la propagation de façon numérique. Pour cela, on envisagera d'effectuer une tentative modélisation des fissures branchées en utilisant des pressions fictives réparties en $\frac{1}{\sqrt{|x - a|}}$ afin de bien décrire les effets des singularités.

Les potentiels complexes associés à ce type de répartition sont pour $l=1$:

$$\psi(z) = \frac{a}{2} \left[\log 2 (\sqrt{z^2 - a^2} + z) \right] + \sqrt{z^2 - a^2} - 2i \sqrt{z-a}$$

$$\phi(z) = \frac{\partial \psi(z)}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \left[z + \frac{a}{2} - i \sqrt{z+a} \right]$$

$$\frac{\partial \phi(z)}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \left(1 - \frac{i}{2\sqrt{z+a}} \right) - \frac{z}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \left(z + \frac{a}{2} - i \sqrt{z+a} \right) \quad (5.7.1)$$

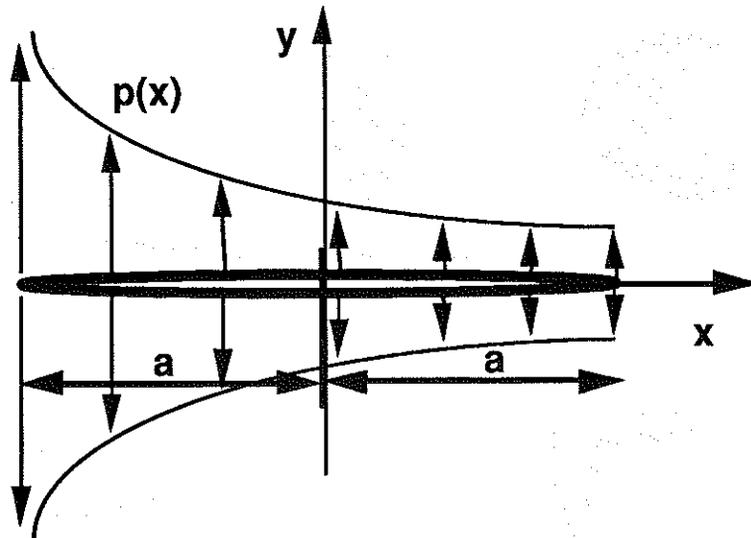


Figure 5. 13 : fissure sous pression singulière.

Le problème de l'orthogonalité des répartitions choisies sera soulevé puisque la base de Legendre choisie ne comporte pas d'éléments de ce type. Une autre base pourra être choisie pour ce type de répartition. On rappelle qu'il est possible de choisir une base de répartition et un ordre du développement différent pour chaque élément (fissure,...) voire même différent pour les composantes normales et tangentielles.

La fonction utilisée pour décrire le champ des contraintes singulier dépend de la longueur de la fissure qui provoque ce champ singulier (terme en \sqrt{a} de (5.2.6)) et non de la longueur de la fissure sur laquelle on décrit le champ des contraintes.

Les fissures en "T" ont été étudiées par Y. BENVENISTE [BENVENISTE 88] à l'aide de répartitions discontinues. Les résultats obtenus par la méthode de superposition sont satisfaisants.

5. 8. CAS DU TRAJET NON RADIAL

La prise en compte du frottement implique une dépendance de l'état d'une structure du trajet de chargement. Le cas de trajet non radial ne permet pas l'obtention directe de la valeur de λ . La recherche du point appartenant à la surface seuil de rupture correspond à la recherche de λ tel que par exemple :

$$\left(\begin{array}{l} \sigma_{11} = \sigma_{11}^0 + \lambda \cos \alpha \cos \beta \\ \sigma_{12} = \sigma_{12}^0 + \lambda \sin \beta \end{array} \right) = \sigma$$

$$\left(\begin{array}{l} \sigma_{12} = \sigma_{12}^0 + \lambda \sin \beta \\ \sigma_{22} = \sigma_{22}^0 + \lambda \sin \alpha \sin \beta \end{array} \right) = \sigma$$
(5. 8. 1)

$$\text{avec } R = G(\sigma) - D(\sigma) \quad (5. 8. 2)$$

où G et D ne sont plus proportionnels à λ^2

On pourra, par exemple, utiliser une procédure par dichotomie pour évaluer λ . Les quelques calculs effectués en trajets non-radiaux montrent que la surface seuil de première propagation dépend peu du trajet de chargement. En effet, seuls l'effet de quelques interactions peut modifier la surface seuil puisque les fissures se propageant ne sont pas bloquées pour le chargement de "rupture".

5. 9. POINTS DE BIFURCATION

Si pour des cas simples (fissures symétriques symétriquement chargées) on met en évidence des possibilités de bifurcation, on peut se demander dans quelles mesures la bifurcation est fréquemment rencontrée pour des géométries quelconques. Pour cela, il suffit de "lire" la surface seuil de première propagation : on peut rattacher à chaque point de la surface seuil de première propagation une extrémité de fissure où la propagation est prédite. On peut donc déceler les chargements pour lesquelles au moins deux fissures vont atteindre le seuil de propagation simultanément. Pour un nombre de fissures et une géométrie donnée, on peut donc savoir pour quel type de chargement plusieurs solutions existent quant à la propagation.

ANNEXES

A5. 1. VISUALISATION DES EFFETS DU FROTTEMENT SUR L'ALLURE DES SURFACES SEUILS DE PREMIERE PROPAGATION

Le critère $R = G - D$ est illustré par les courbes de la figure A5. 1. 1. Tout d'abord dans le repère lié à la fissure (figure 5. 6) pour deux valeurs du coefficient de frottement. On rappelle que $k = \frac{R E}{\Pi a}$, où R désigne la ténacité, E le module d'Young et a la demi-longueur de fissure.

Pour une infinité de fissures, toutes de même taille et équiréparties en angle, les surfaces de la figure A5. 1. 2 sont évaluées sans interaction dans le plan des contraintes $(\sigma_{11}, \sigma_{12})$ et $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$. Le coefficient de frottement vaut 0 pour les courbes pointillées et 0,5 pour les courbes en trait plein.

Pour une infinité de fissures, toutes de même taille et équiréparties en angle, si l'on néglige les interactions les courbes des figures A5. 1. 3 et A5. 1. 4 donnent :

- l'angle du plan de rupture α_R (l'angle de la fissure pour laquelle le critère sera atteint en premier) en fonction de la valeur du coefficient de frottement ϕ .

- la pente A de l'asymptote à la surface seuil dans le domaine des bi-compressions en fonction de la valeur du coefficient de frottement ϕ .

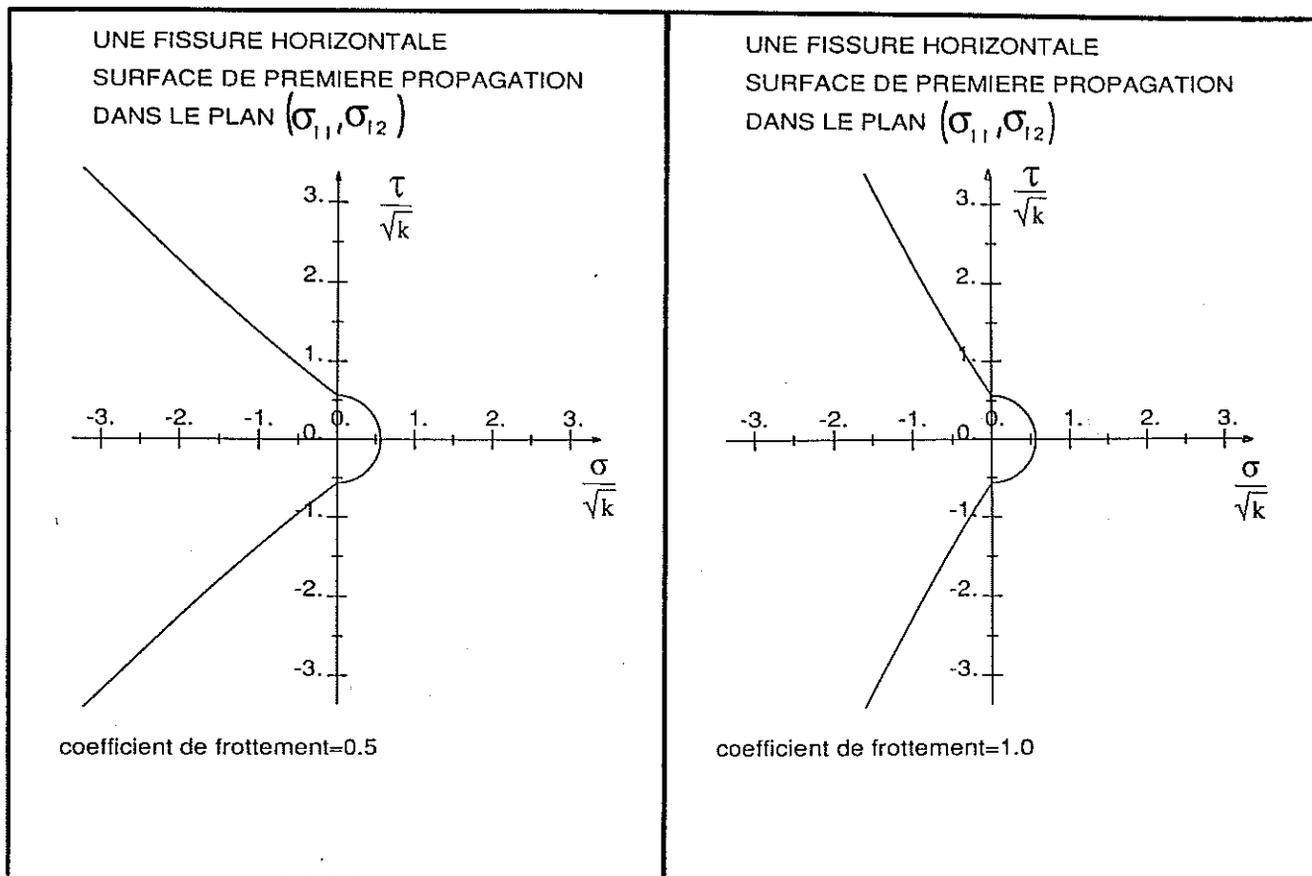


Figure A5. 1. 1

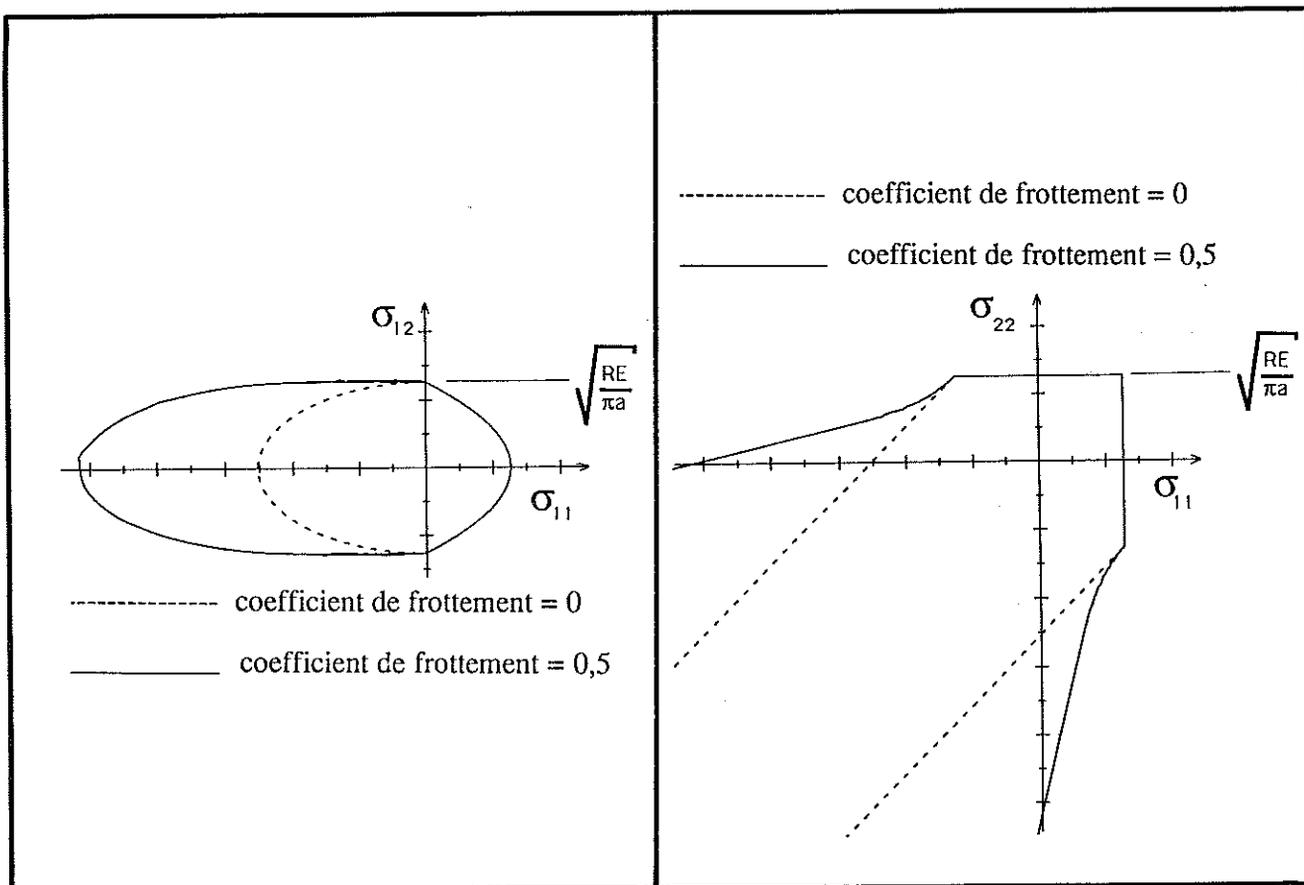


Figure A5. 1. 2

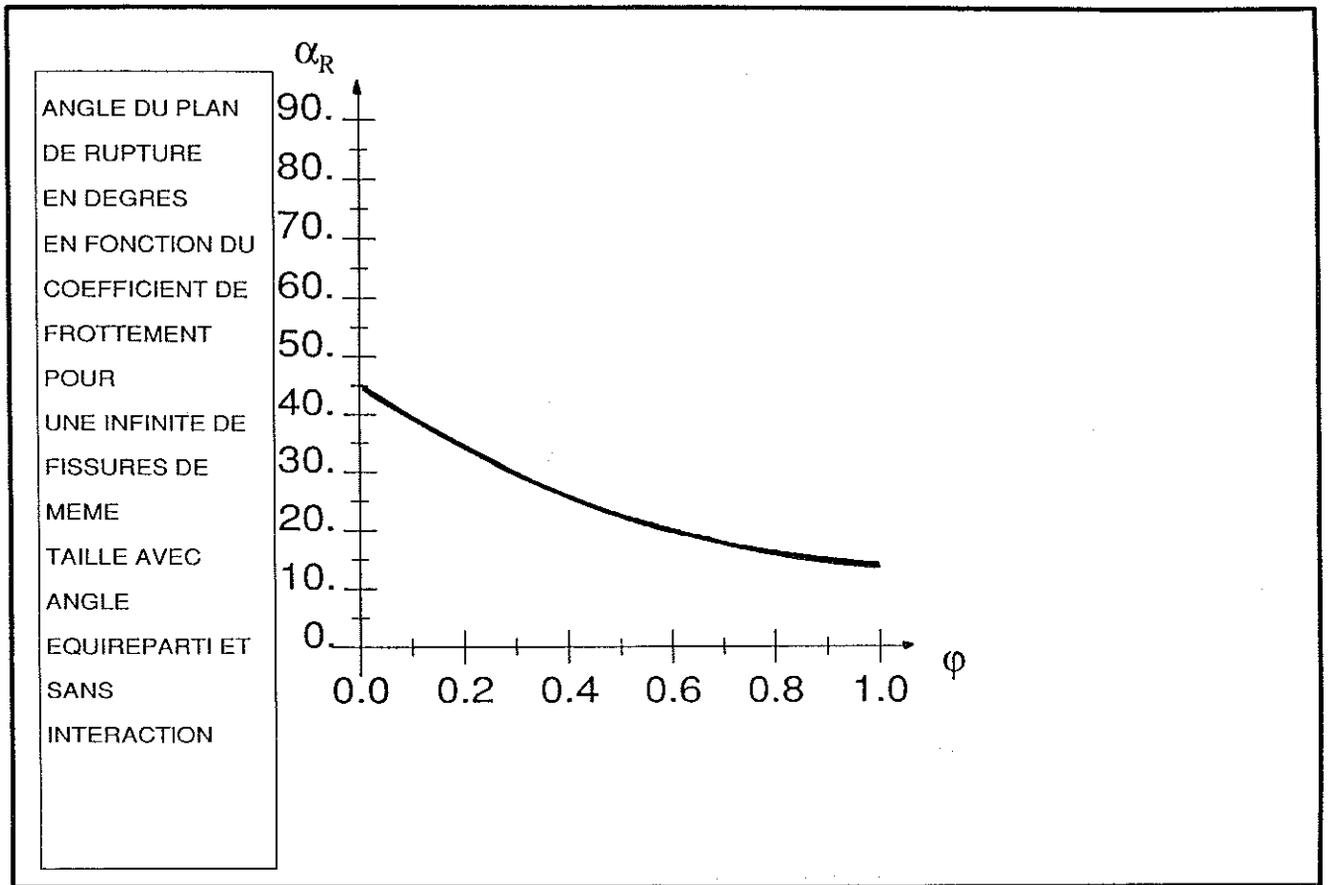


Figure A5. 1. 3

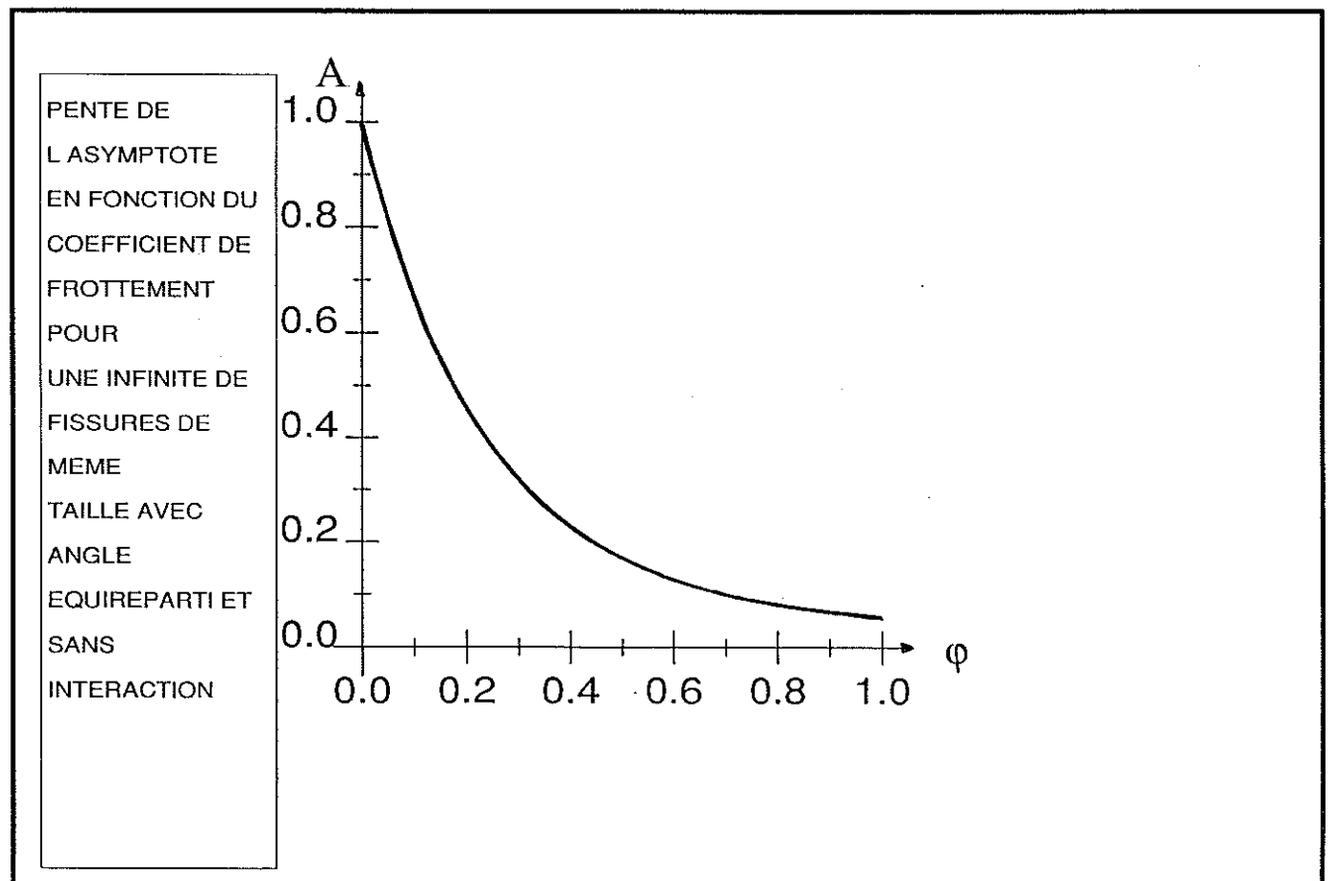


Figure A5. 1. 4

**APPLICATION A L'ETUDE DE
LA FISSURATION**

6. APPLICATION A L'ETUDE DE LA FISSURATION

6. 1. POSSIBILITES D'ETUDES

L'état actuel de l'outil de calcul ne permet hélas pas de modéliser tous les mécanismes de rupture fréquents dans les matériaux à matrice fragile. D'autre part une modélisation bi-dimensionnelle peut ne pas être réaliste (les interactions sont en général plus importantes en élasticité plane qu'en calcul tri-dimensionnel puisque les fonctions décroissantes du type $\frac{1}{r^2}$ dans le plan sont décroissantes de type $\frac{1}{r^3}$ dans l'espace). Toutefois les investigations possibles à l'aide de la méthode de superposition constituent une étape indispensable pour une meilleure approche des phénomènes de localisation des déformations.

Deux aspects fondamentaux sont à la base des préoccupations actuelles :

- le comportement global des milieux concernés et les couplages qui le régissent. Les calculs de structure prenant en compte la fissuration et son évolution à l'aide de modèles macroscopiques doivent attribuer à chaque point de la matière un comportement réaliste afin de converger vers la ruine de la structure.

- les effets locaux liés aux interactions. Les paramètres qui régissent l'évolution de la fissuration doivent être clairement définis afin de ne pas attribuer par exemple une énergie dissipée par frottement dans la structure à une énergie de création de surface. Ces études locales doivent prendre en compte les mécanismes à l'échelle inférieure (microscopique) comme le font les modèles macroscopiques. Cette échelle intermédiaire apporte des informations sur les couplages et les processus de localisation des déformations. Ces aspects sont fortement dépendants des modèles choisis (lois pour le contact, critères pour la propagation, distributions initiales, formes initiales...).

Afin de compléter les diverses méthodes d'homogénéisation (sans en constituer une !), la technique permet d'aborder le cas de milieux contenant des "populations importantes" d'éléments avec une bonne fiabilité. Les effets des divers éléments et de leurs répartitions apparaissent du point de vue expérimental en utilisant des matériaux modèles. Il n'est pas toujours possible de réaliser les matériaux voulus et la modélisation numérique comble les lacunes des possibilités pratiques.

Les mesures locales aux échelles concernées font l'objet de développements actuels mais leur résolution autant que leur souplesse d'utilisation les rend bien souvent inefficaces. Une fois de plus la modélisation numérique intervient là où l'expérience trouve ses limites. Les sollicitations multiaxiales dirigent d'autant plus les difficultés sur le plan expérimental.

Cependant la modélisation numérique ne peut s'abstenir d'expériences autant pour la partie modélisation numérique que pour la partie validation des modèles. Il faut considérer la modélisation numérique et l'expérience comme complémentaires et non en concurrence. Un aller-retour permanent entre ces deux approches est essentiel.

6. 2. REPONSE LOCALE DE MILIEUX MULTIFISSURES

Le tableau 6. 1 indique le facteur d'intensité des contraintes pour les géométries de la figure 6. 2. 1 . M. Kachanov et E. Montagut ont montré [MONTAGUT 88] que pour des "mésolfissures" réparties de façon aléatoire, aucune tendance générale n'affecte K_I . On s'aperçoit ici que la prise en compte de l'effet de refermeture au travers due à une contrainte axiale ne modifie pas cette conclusion.

contrainte σ_{11} ($\sigma_{22}=1$)	géométrie 1 $K_I/K_{I\infty}$	géométrie 2 $K_I/K_{I\infty}$
0	1,078	1,069
-1	1,073	1,069
-3	1,064	1,069

Tableau 6. 1

Les effets locaux semblent être à traiter au cas par cas. Ce sont les "queues de distribution" (quelques fissures très proches ou de grandes tailles) qui pilotent la localisation.

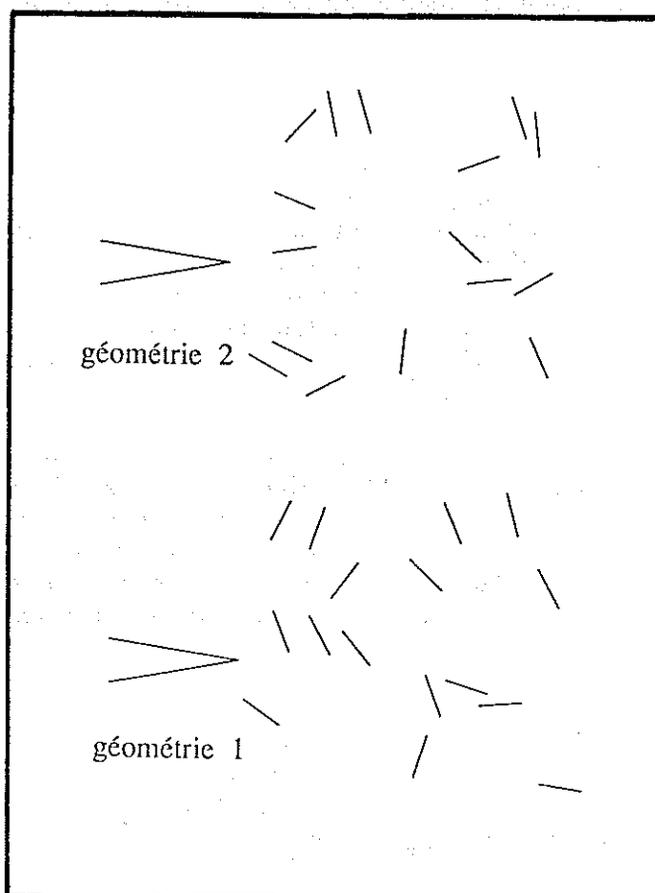


Figure 6. 2. 1

6. 3. SURFACES SEUILS DE PREMIERE PROPAGATION

Le chapitre 7. cherche à évaluer les effets d'un modèle de frottement de Coulomb sur les possibilités d'évolution de la fissuration avec le modèle de propagation rectiligne. On envisage ici pour un modèle géométrique (fissures de même taille...) les possibilités de propagation.

Pour les 30 fissures du schéma de la figure 6. 3. 1, les calculs ont été menés avec $\phi = 0,5$. G_i et D_i ont été évalués à partir des pressions fictives de la seule fissure i (voir le chapitre 7. 3.). Les fissures ont toutes une longueur de 0,1 m. Le rapport $\frac{R E}{\Pi}$ vaut 1. Les fissures sont placées en position et en angle de façon aléatoire à l'aide d'un ordinateur. Afin que les fissures ne se coupent pas lors du tirage, une région de 0,01 m autour de chaque fissure est interdite aux fissures tirées ultérieurement. Les surfaces seuils de première propagation ainsi construites sont données par la figure 6. 3. 1 .

L'effet des interactions pour cet exemple se fait sentir essentiellement dans les domaines où des fissures sont en traction. Dans les domaines de compression seules quelques fissures ne peuvent "fonctionner" ce qui explique un faible écart des résultats avec et sans interaction. Les surfaces sont quasiment homothétiques (la règle de proximité lors du tirage ne permettant pas de fortes interactions capables de changer la forme de la surface) et les interactions agissent comme un effet d'écran tendant à décharger les fissures car les contraintes de tractions doivent se transmettre dans le milieu infini par l'extérieur de la zone "endommagée".

Trois cavités circulaires de rayon = 0,05 ont ensuite été placées dans la zone multifissurée (figure 6. 3. 2). On constate dans ce cas une forte influence sur la forme de la surface dans le domaine des bi-compressions. En compression simple les pores génèrent des contraintes de traction qui peuvent avoir pour effet d'ouvrir les fissures ou de diminuer le frottement mobilisable au contact des lèvres. Par contre, les contraintes de tractions engendrées par les pores ne sont pas suffisantes dans le domaine des tractions pour modifier notablement la forme de la surface ni ses valeurs.

Surface seuil de première propagation pour 30 fissures en milieu infini

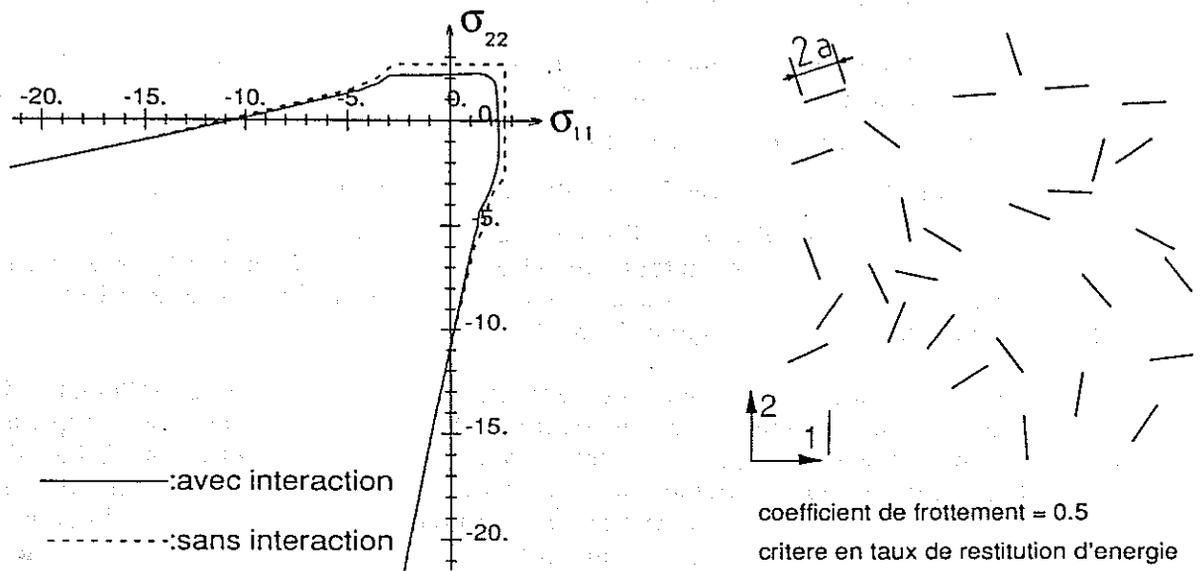


Figure 6. 3. 1

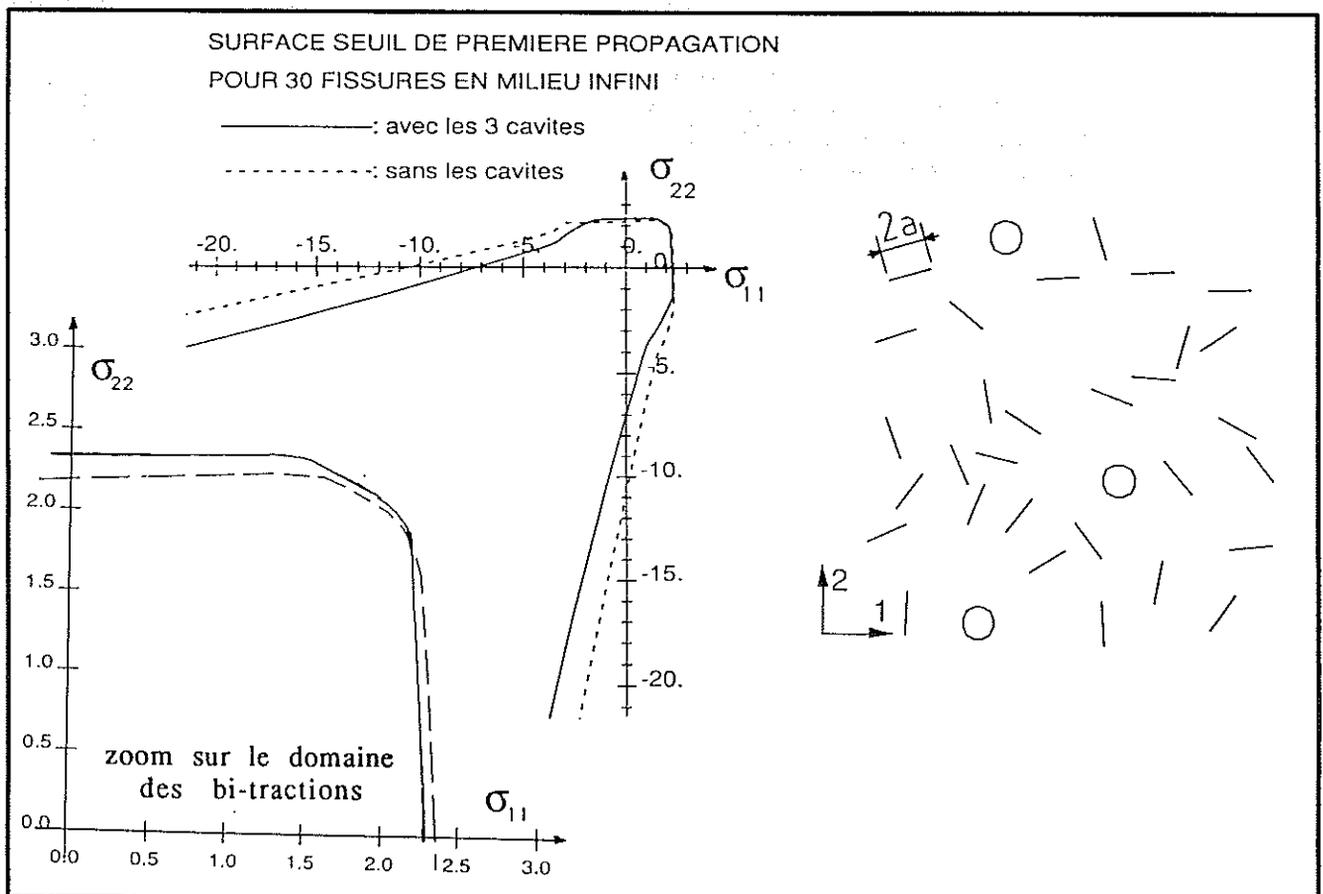


Figure 6. 3. 2

6. 4. PROPAGATION ET LOI DE FROTTEMENT

6. 4. 1. AVERTISSEMENTS

La présentation des résultats sous forme de cartes d'isovaleurs revêt un aspect capital pour l'étude des interactions si l'on veut constater de l'état de sollicitation d'une structure. Le choix du post-processeur pour les sorties graphiques s'est porté pour des raisons de commodité sur le post-processeur "PEGGY 2-D" de logiciel d'éléments finis "CESAR".

Les résultats des calculs par superposition sont injectés aux noeuds d'un maillage régulier rectangulaire à quatre noeuds. Ce maillage ne reflète pas la géométrie de la structure. Lorsque le point matériel se situe dans une cavité ou correspond à un point singulier, une valeur de contrainte ou déplacement fictive y est associée. Cette valeur correspond au résultat qui serait obtenu si le domaine ne comportait ni fissure, ni pore. C'est dans le but de perturber le moins possible la représentation des résultats que nous avons adopté ce principe.

Les valeurs au voisinage des concentrations de contraintes quoiqu'évaluées avec précision par la méthode de superposition sont mal représentées par les sorties graphiques lorsque la taille de la maille est de l'ordre de la dimension des fissures ou pores. La position de la singularité dans la maille peut alors attribuer à un noeud une valeur qui va influencer la répartition le tracé graphique dans un domaine qui s'étend aux mailles voisines.

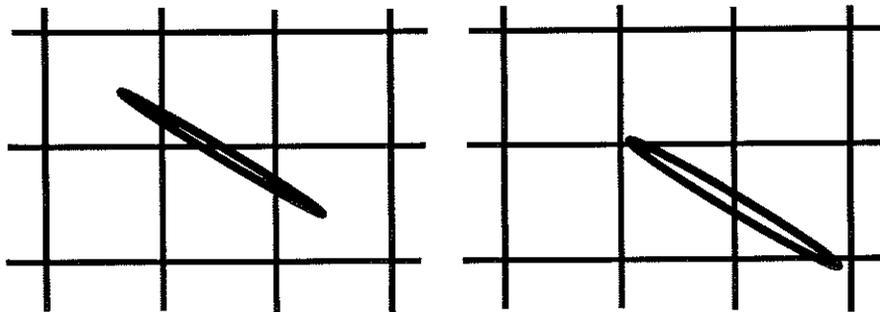


Figure 6. 1 : position des singularités par rapport au maillage.

De plus un maillage carré favorise les tracés de zones d'isovaleurs horizontales, verticales et à 45 degrés. La "lecture" des cartes doit conséquemment privilégier les régions hors "défauts de matière". Le but de ces représentations graphiques est en effet de constater dans quelles mesures les interactions ou les géométries "organisent" la rupture ou les ruptures.

6. 4. 2. OBJECTIFS

Bien que l'outil développé ne soit pas idéalement adapté à l'étude de la propagation, il est tout de même utile d'envisager des évolutions de la fissuration dans le cadre défini au chapitre 7. Pour le béton la diffusion de la fissuration est essentiellement liée à l'interaction des fissures avec les granulats (y compris pour les fissures interfaciales) et ce schéma peut être abordé à l'aide de "courbes R" qui décrivent la difficulté des fissures à se propager au voisinage des inclusions. Il serait évidemment paradoxal de mener des calculs précis au niveau des interactions entre fissures, bords libres et pores (qui en général n'influe que de quelques % sur les résultats qui seraient obtenus en les négligeant) et d'y adjoindre des résultats liés à des interactions locales concernant une fissure à l'approche d'une inclusion. La modélisation numérique des inclusions ne

présentant pas de difficultés techniques pour les fonctions développées au chapitre 4. nous ne tentons pas ici une simulation grossière de la présence de ces inclusions mais laisserons cette importante possibilité aux perspectives de ce travail.

La première étape, la plus simpliste, dans la modélisation de la géométrie de milieux fissurés consiste à répartir de façon aléatoire les angles des fissures pour une longueur de fissure donnée. Un critère de proximité assure qu'aucune fissure ne coupe une autre et que la configuration de départ ne privilégie pas les interactions. Une distance minimum qui sépare les extrémités des fissures est imposée lors du tirage de la population (figure 6. 4. 1) Le but est de cerner au cours de la propagation le moment où les interactions agissent de façon notable le cas échéant et quel est leur rôle.

Le comportement en compression exige une bonne modélisation du contact des lèvres de fissures. Diverses lois peuvent être appliquées et testées en comparaison avec la réalité expérimentale. Trois modélisations seront abordées ensuite :

- le cas extrême où il n'y a pas de frottement mobilisable dans les fissures. L'aspect unilatéral sera néanmoins pris en compte dans les calculs pour comparer avec l'étude du comportement en traction des matériaux.

- le frottement est constant dans les fissures et vaudra en général 0,5.

- les fissures sont ouvertes initialement (auto-contraintes d'élaboration du matériaux) et les frottements mobilisables augmentent avec les longueurs de fissures [BOURNAZEL 91]. La loi utilisée pour évaluer le coefficient de frottement est arbitrairement :

$$\varphi = c e^{(a/a_i)} \quad (6. 4. 1)$$

où a désigne la longueur de la fissure, a_i la longueur initiale de la fissure et c est une constante.

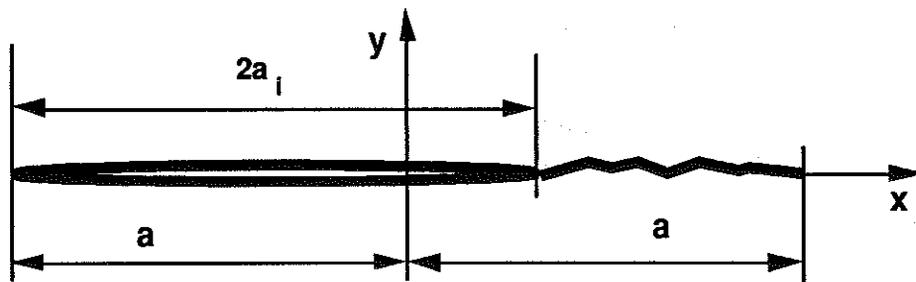


Figure 6. 2 : propagation d'une fissure initialement ouverte

Toutefois le coefficient de frottement est considéré comme constant sur toute la longueur de la fissure. Adopter un coefficient de frottement variable sur la longueur ne poserait pas de problèmes techniques insurmontables mais néanmoins nécessiterait des modifications de l'algorithme de calcul actuel.

Chaque calcul correspondant à chaque étape de la propagation est effectué en chargement radial. La prise en compte du frottement implique la prise en compte de l'histoire du chargement et de l'histoire de la propagation. Nous considérerons ici que le matériau est déchargé puis rechargé après chaque propagation puisque l'histoire de la propagation (certainement négligeable aux vues des ordres de grandeurs des interactions évaluées ici) n'est pas aisément

incorporable à l'algorithme de calcul (les fissures doivent être décomposées en partie initiales et parties propagées).

6. 4. 3. GEOMETRIE INITIALE ET CHARGEMENT

Le cas de la compression simple est le plus couramment rencontré pour les essais de béton et c'est pour cette raison que nous l'adoptons pour visualiser les effets des paramètres que nous manipulons dans le but de comparer avec la réalité. Les ingrédients que nous injectons dans les calculs sont-ils suffisants (et non nécessaires !) pour obtenir un comportement semblable à la réalité ? La contrainte appliquée est unitaire et le milieu est infini.

La distribution géométrique initiale de 70 fissures de longueur 0,2 (la notion d'unité n'est pas indispensable ici) sépare les extrémités des fissures d'au moins 0,4. Les interactions pour le cas traité jouent peu sur les taux de restitution d'énergie de chaque fissure.

C'est donc la fissure la mieux orientée en fonction de la loi adoptée pour le contact qui aura tendance à se propager (figures 6. 4. 2 à 6. 4. 8). Les cercles permettent de repérer les longueurs initiales des fissures. Par la suite, le taux de restitution d'énergie étant proportionnel à la longueur de la fissure, il est peu probable que cette fissure "s'arrête" si tout est figé par ailleurs (interactions toujours faibles et loi de contact indépendante de la longueur ; pas d'inclusion, de fissure ni de pore sur le trajet de la fissure).

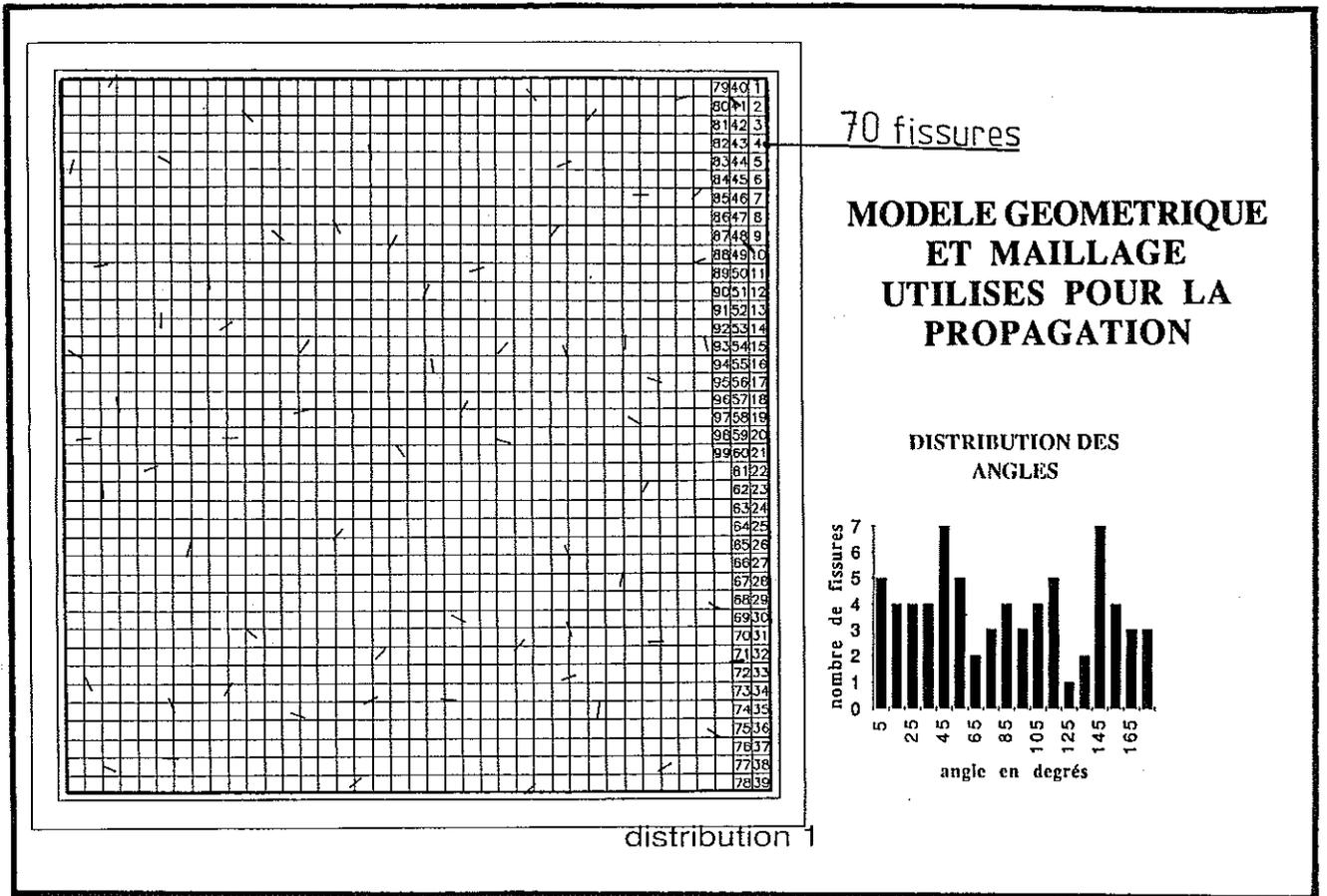


Figure 6. 4. 1

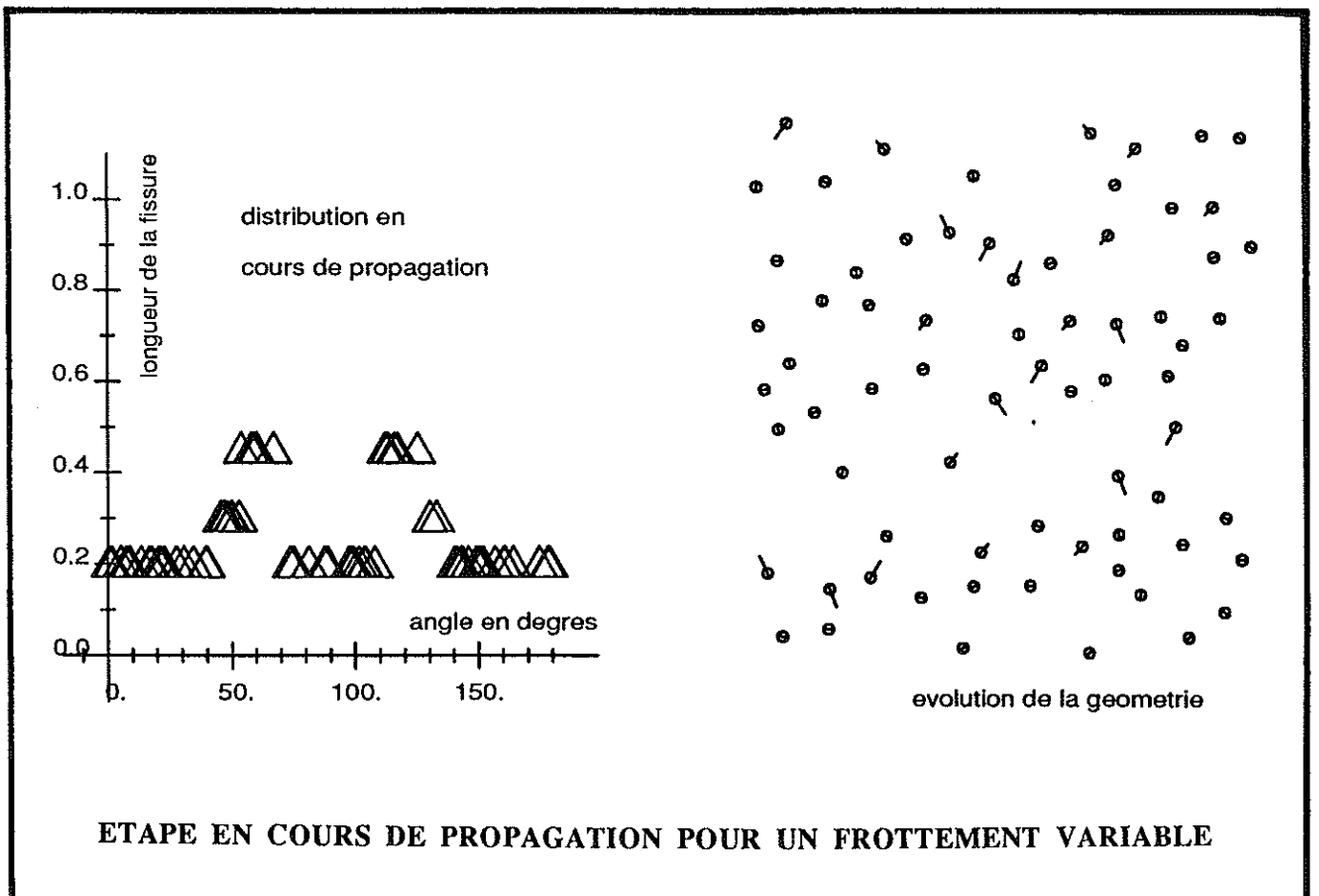


Figure 6. 4. 2

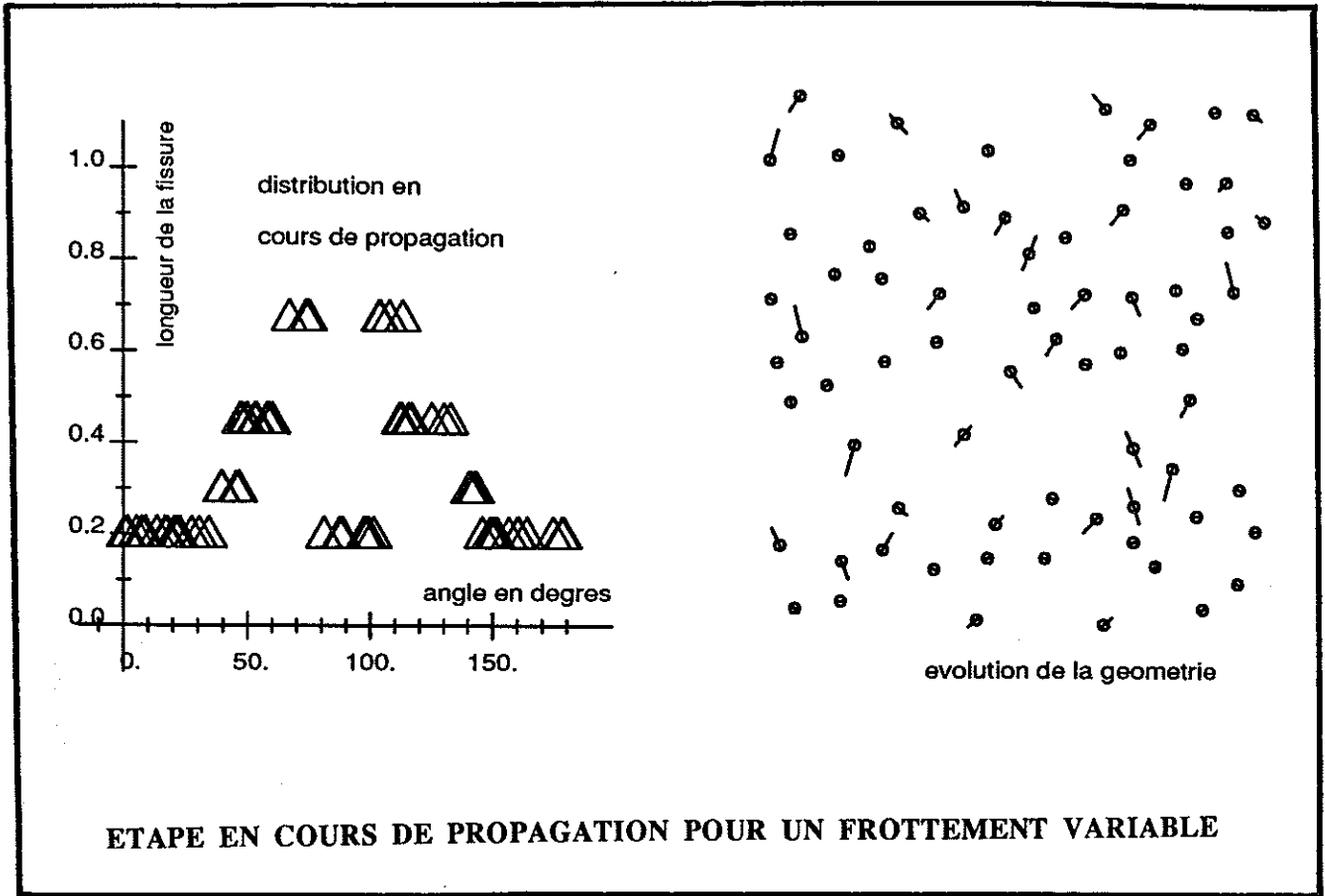


Figure 6. 4. 3

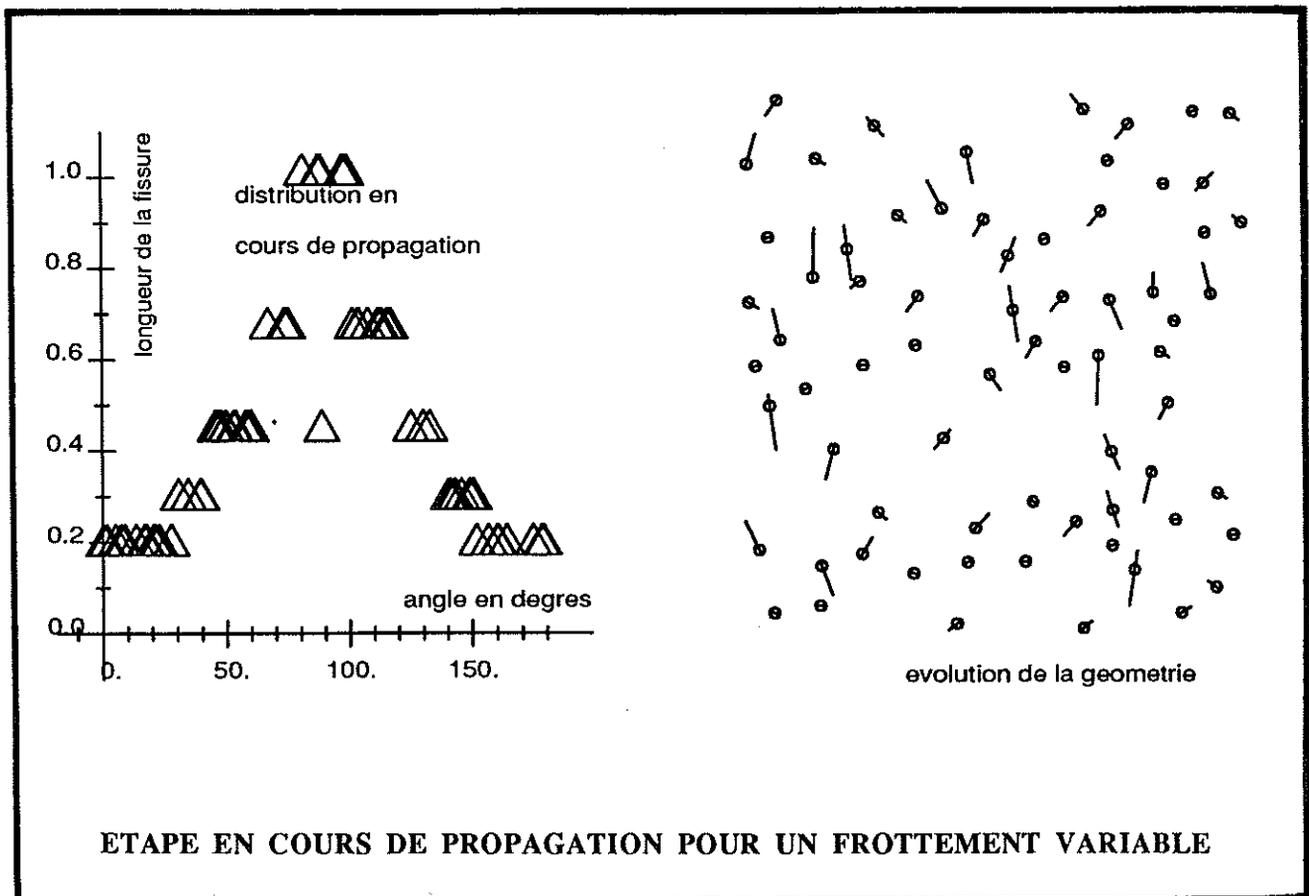


Figure 6. 4. 4

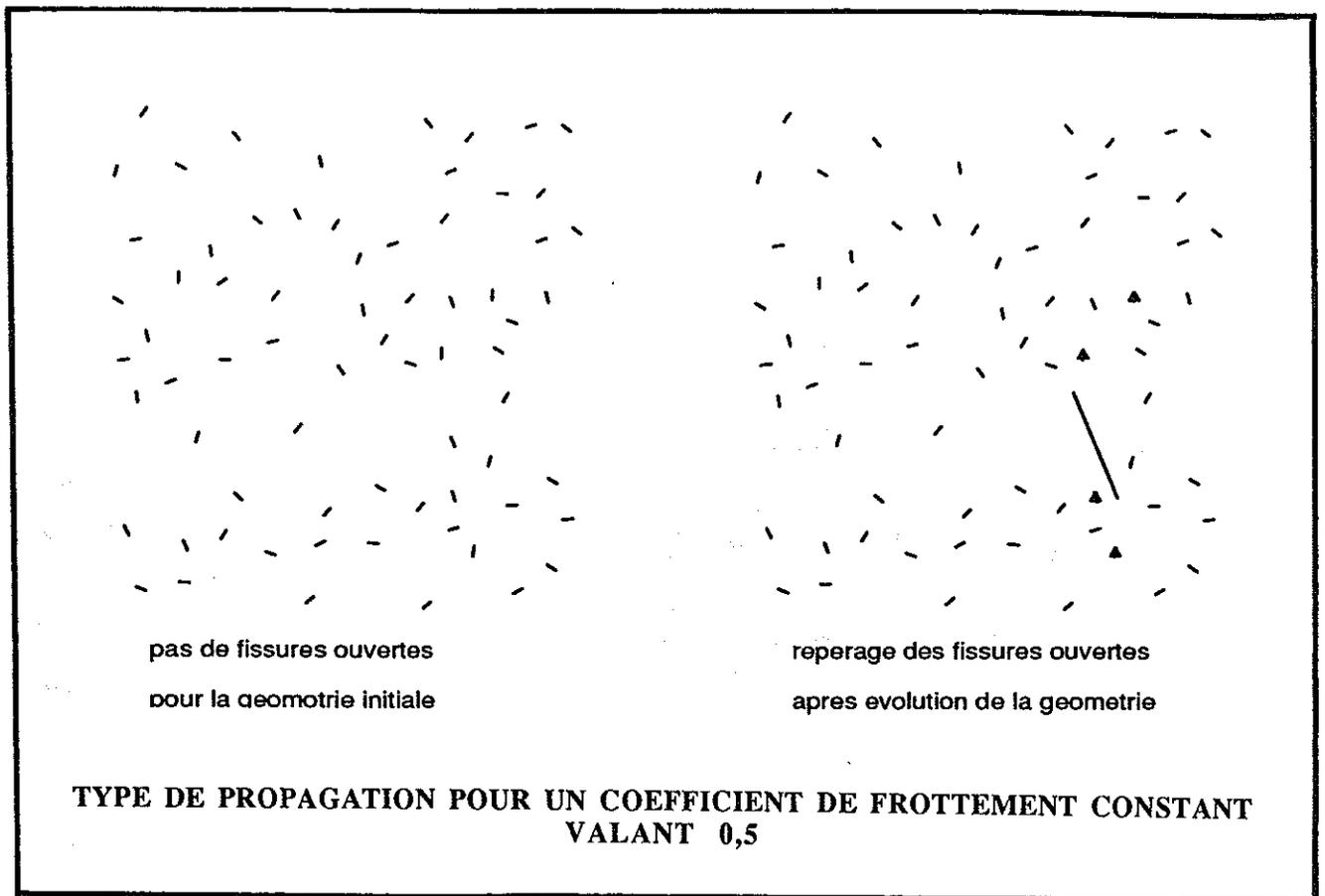


Figure 6. 4. 5

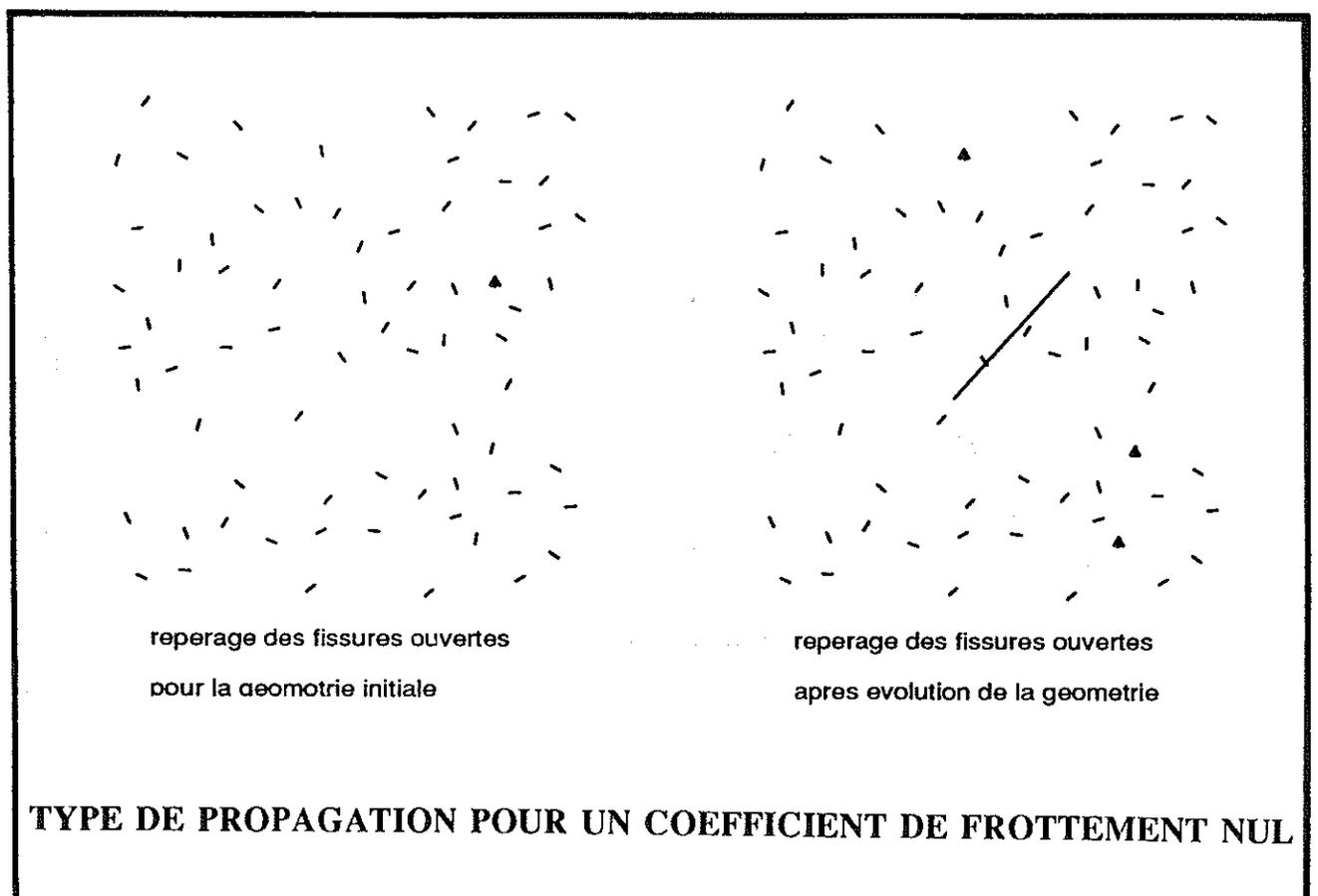


Figure 6. 4. 6

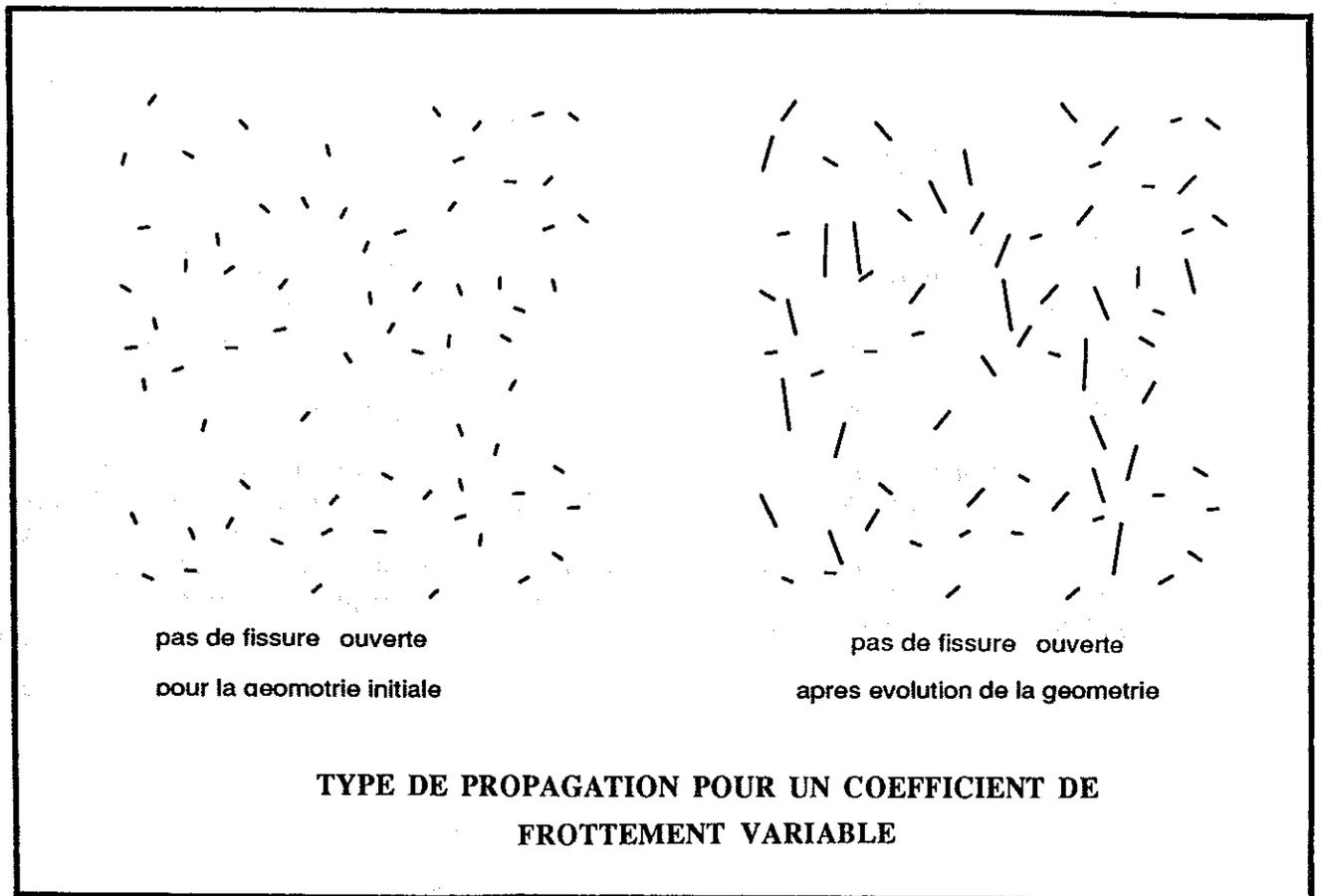


Figure 6. 4. 7

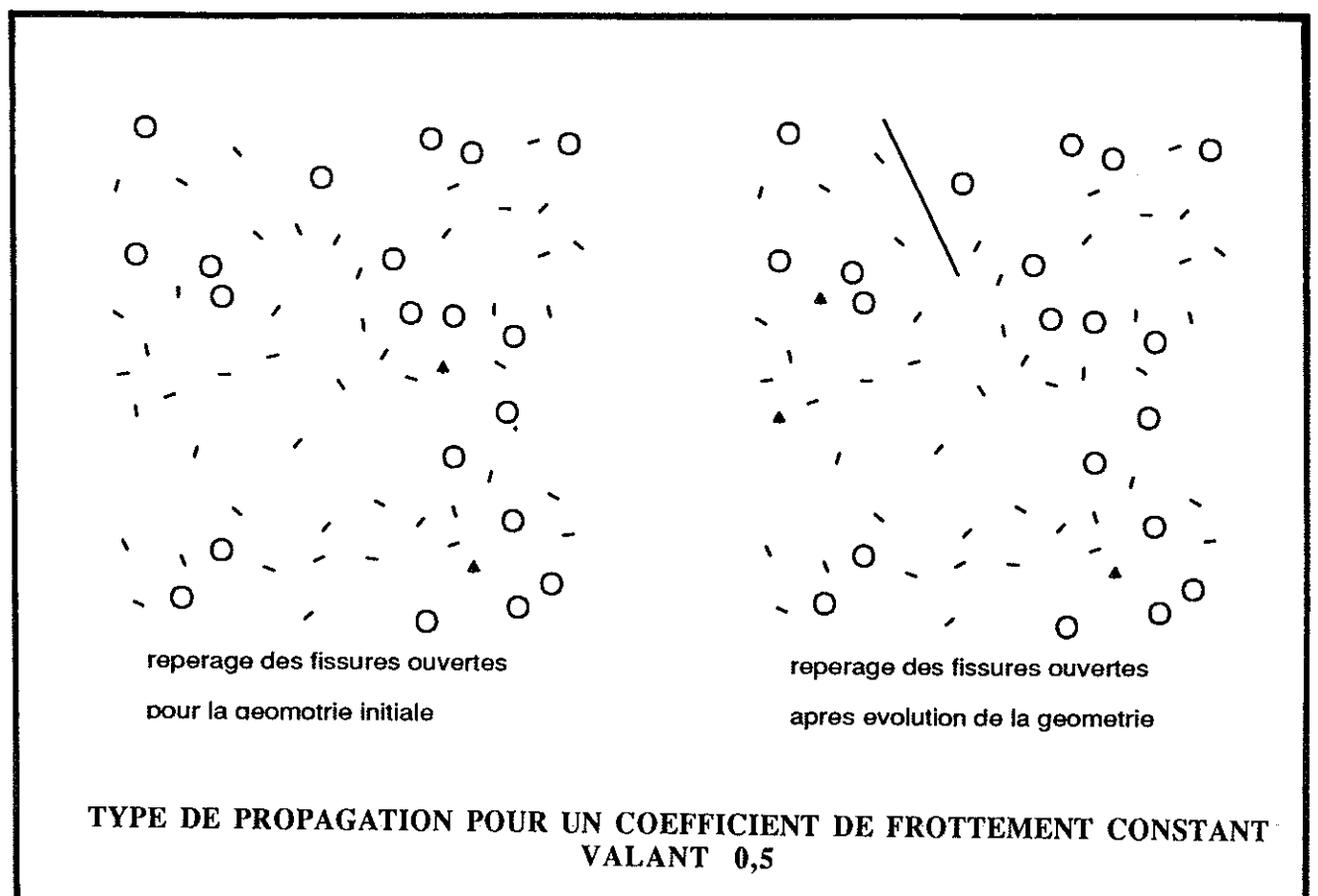


Figure 6. 4. 8

6. 4. 4. FROTTEMENT CONSTANT

La valeur adoptée pour ϕ est 0,5 car elle semble raisonnable compte tenu des évaluations du chapitre 7. 4. . Les cartes d'isovaleurs présentées par les figures 6. 4. 9 à 6. 4. 12 indiquent qu'une proportion importante de fissures sont bloquées (l'angle limite du blocage vaut dans ce cas 26,56 degrés).

La contrainte principale d'extension (figure 6. 4. 11) est presque toujours voisine de l'horizontale dans notre exemple (figure 6. 4. 12 : angles du repère principal en degrés) et sa valeur faible devant la contrainte de compression (de l'ordre du %). L'effet des interactions en terme d'énergie de déformation est négligeable (de l'ordre du $^{\circ}/_{00}$) et aucune tendance particulière n'apparaît clairement dans la zone où va se propager une fissure (figure 6. 4. 5 gauche).

Il y a propagation d'une seule fissure jusqu'à la ruine de la structure. On assiste comme en traction à une rupture fragile. La propagation de cette fissure provoque l'ouverture de quatre fissures voisines et il est évident que la propagation en ligne droite n'a pas satisfait au chemin énergétique rigoureux [NEMAT-NASSER 82] et (figure 6. 4. 5 droite) puisque les fissures aurait vraisemblablement tendance "à se brancher".

6. 4. 5. CAS PARTICULIER DU FROTTEMENT NUL

Dans cette situation où l'aspect unilatéral du comportement est pris en compte les fissures à 45 degrés sont les plus chargées en terme de taux de restitution d'énergie. Du fait de la distribution géométrique initiale qui ne favorise pas les interactions cet angle n'est pas modifié par les interactions entre fissures (figure 6. 4. 6).

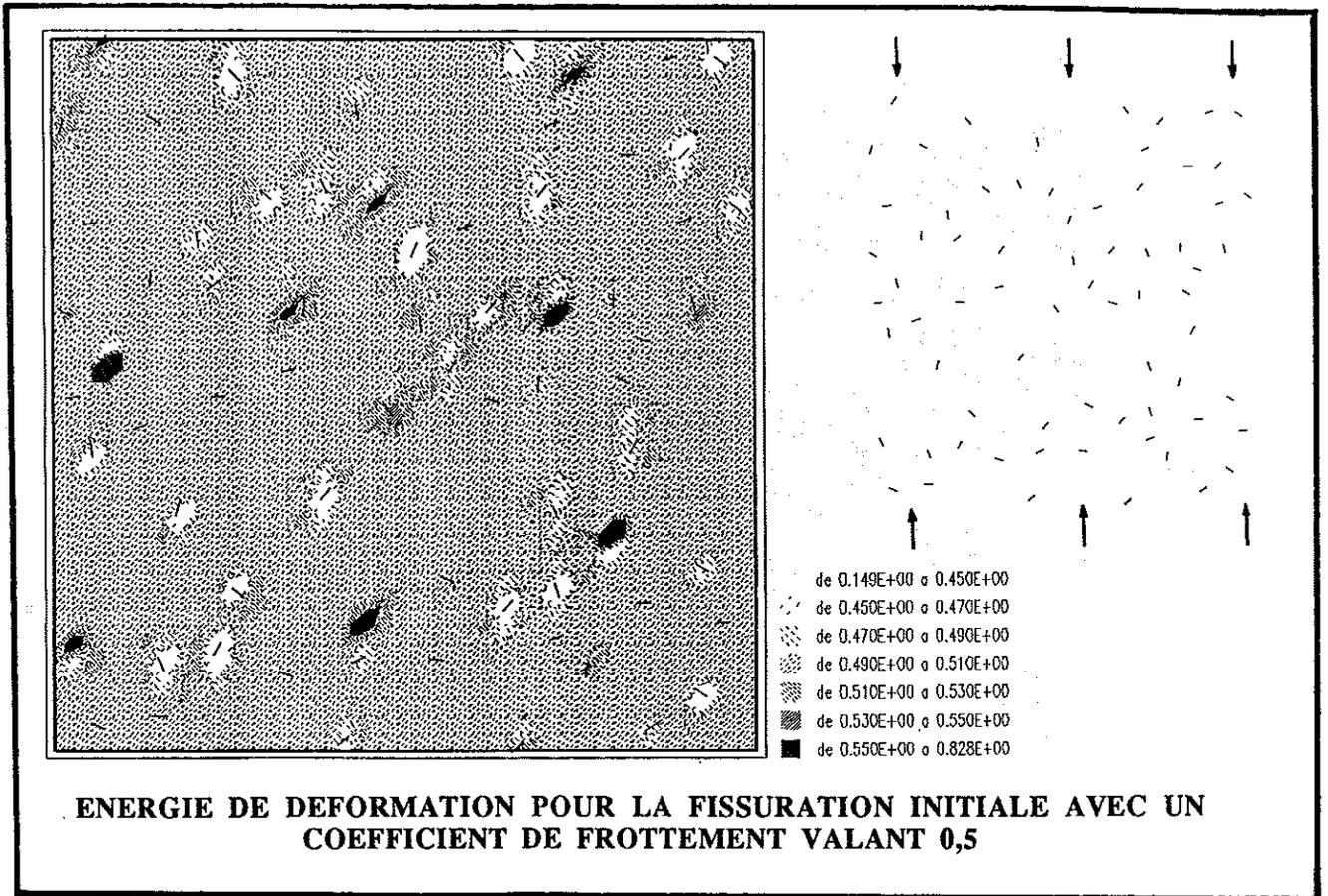


Figure 6. 4. 9

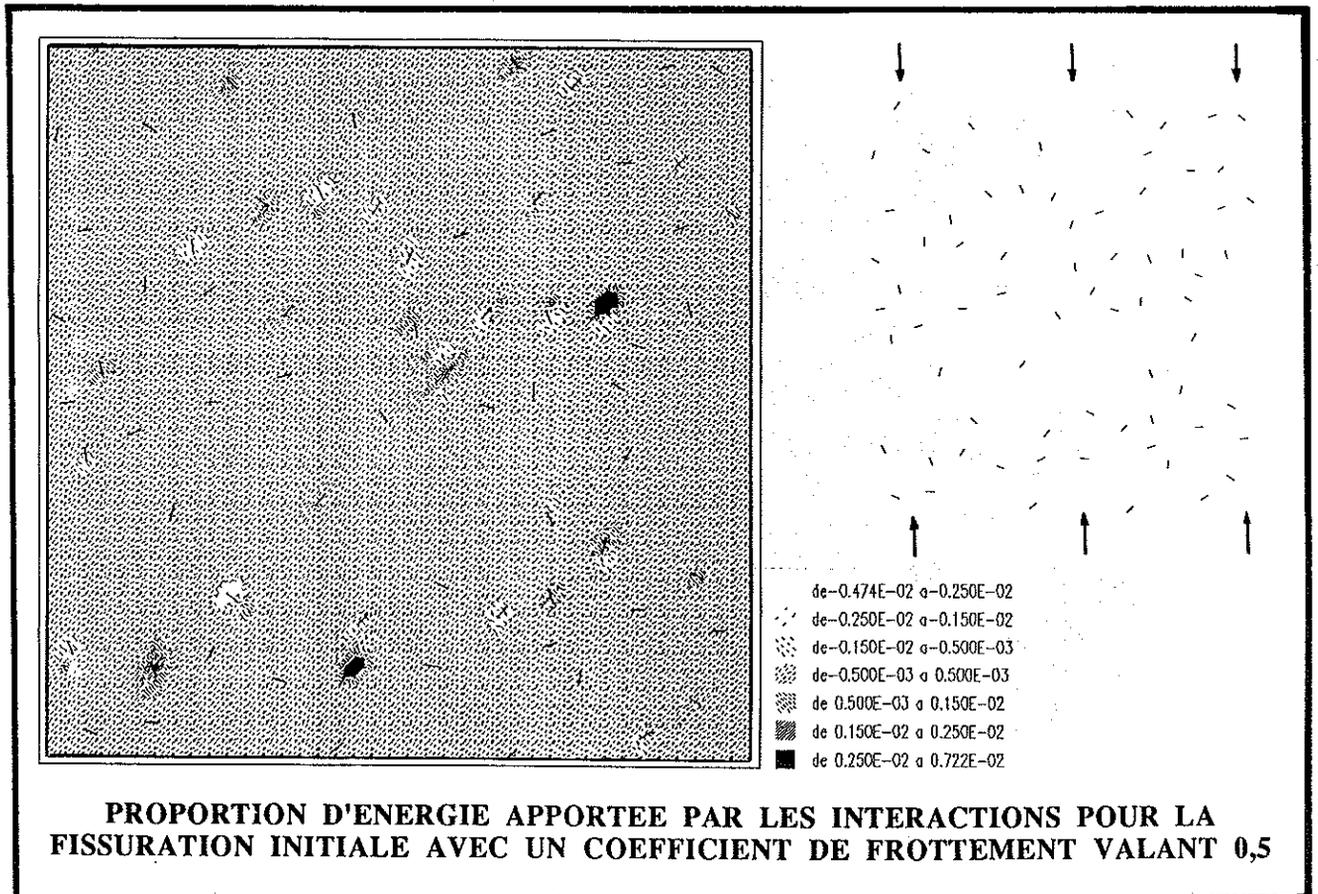


Figure 6. 4. 10

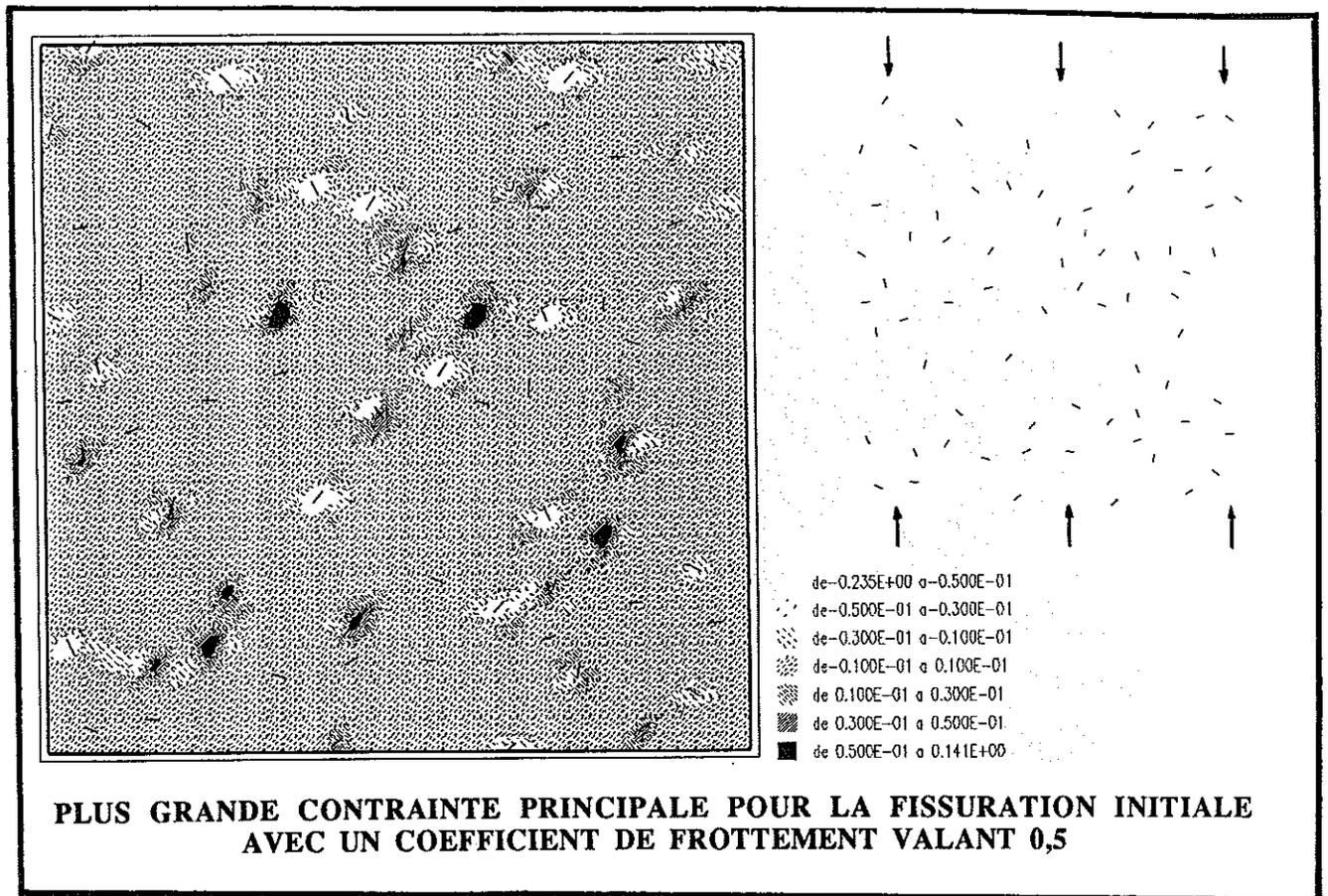


Figure 6. 4. 11

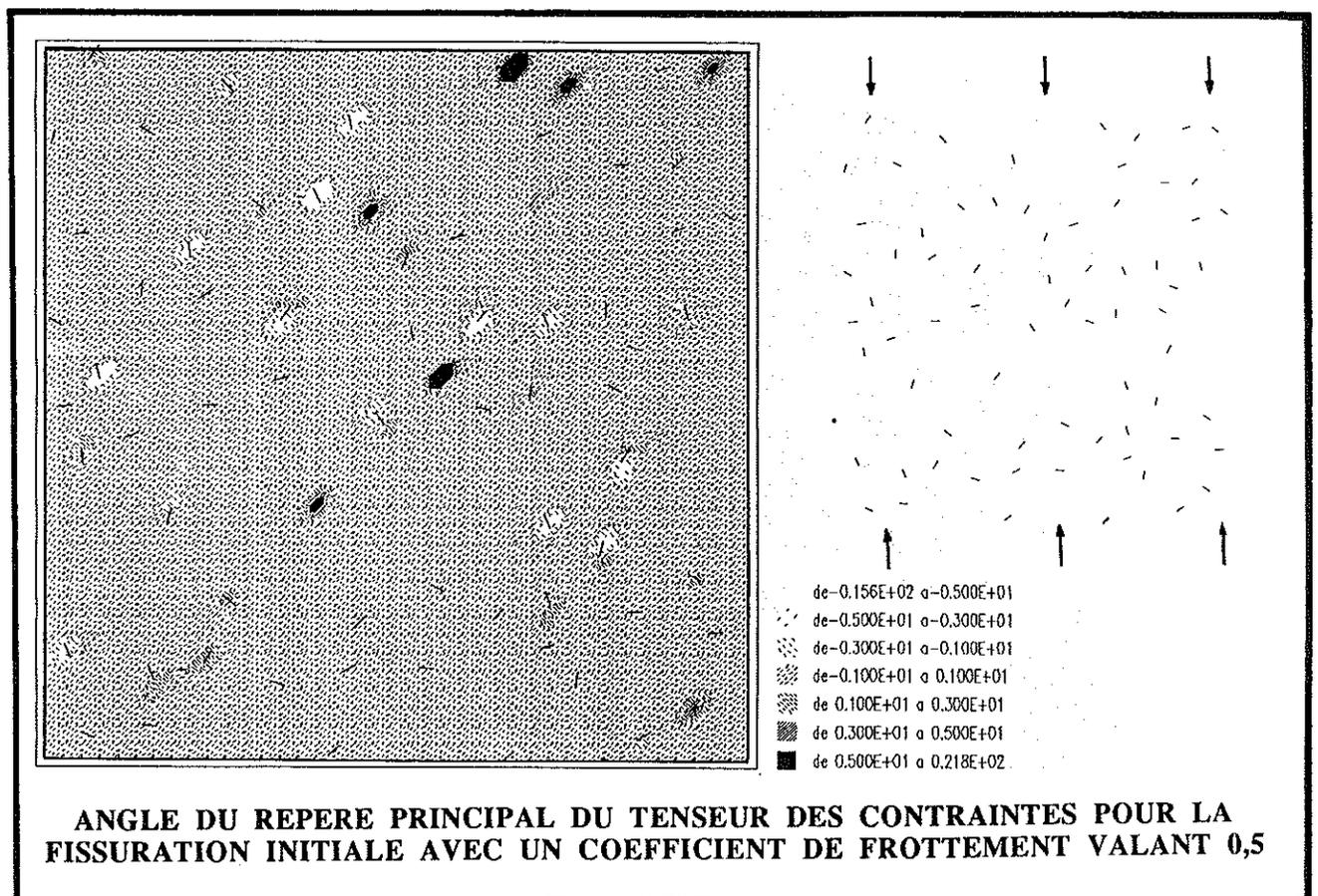


Figure 6. 4. 12

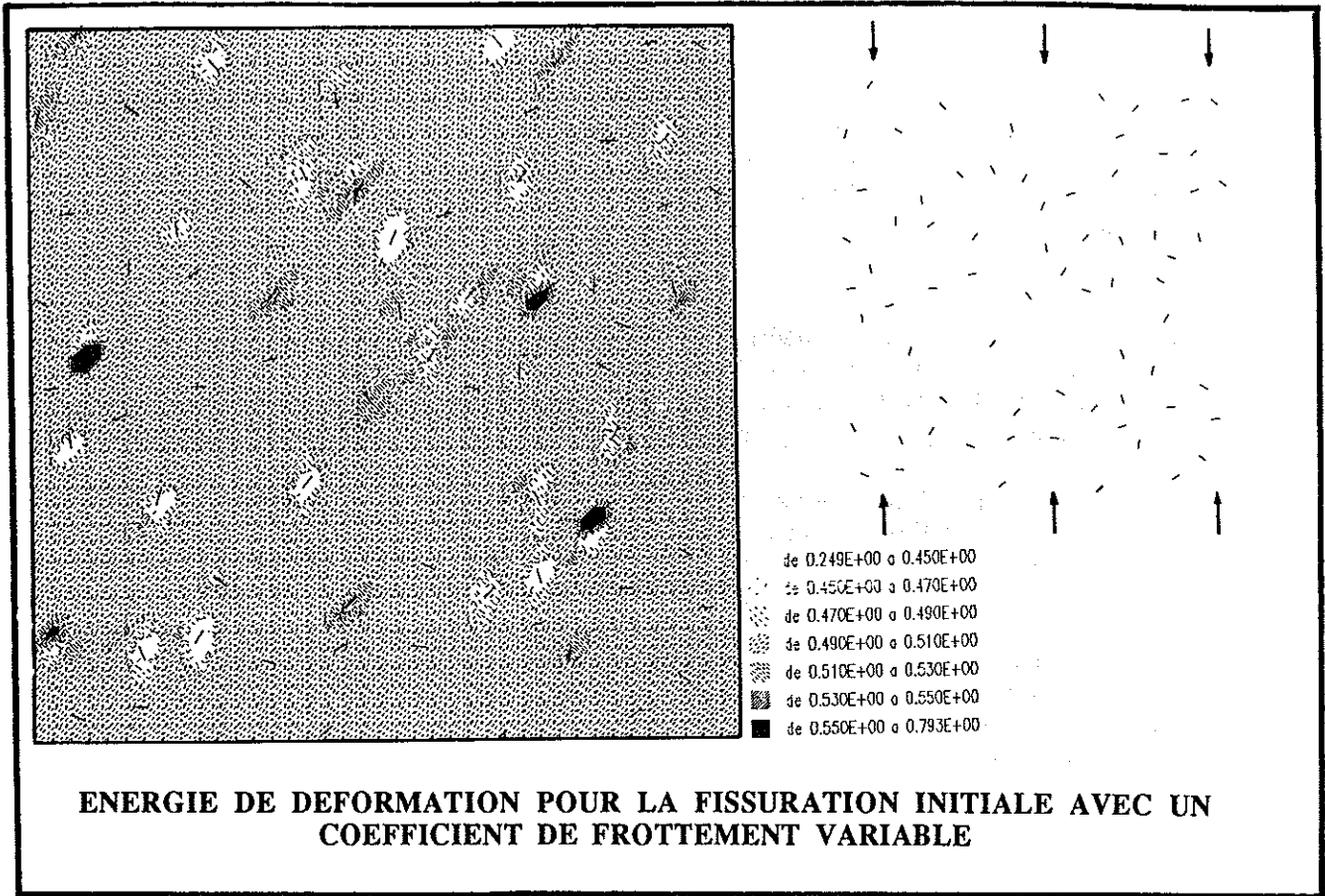


Figure 6. 4. 13

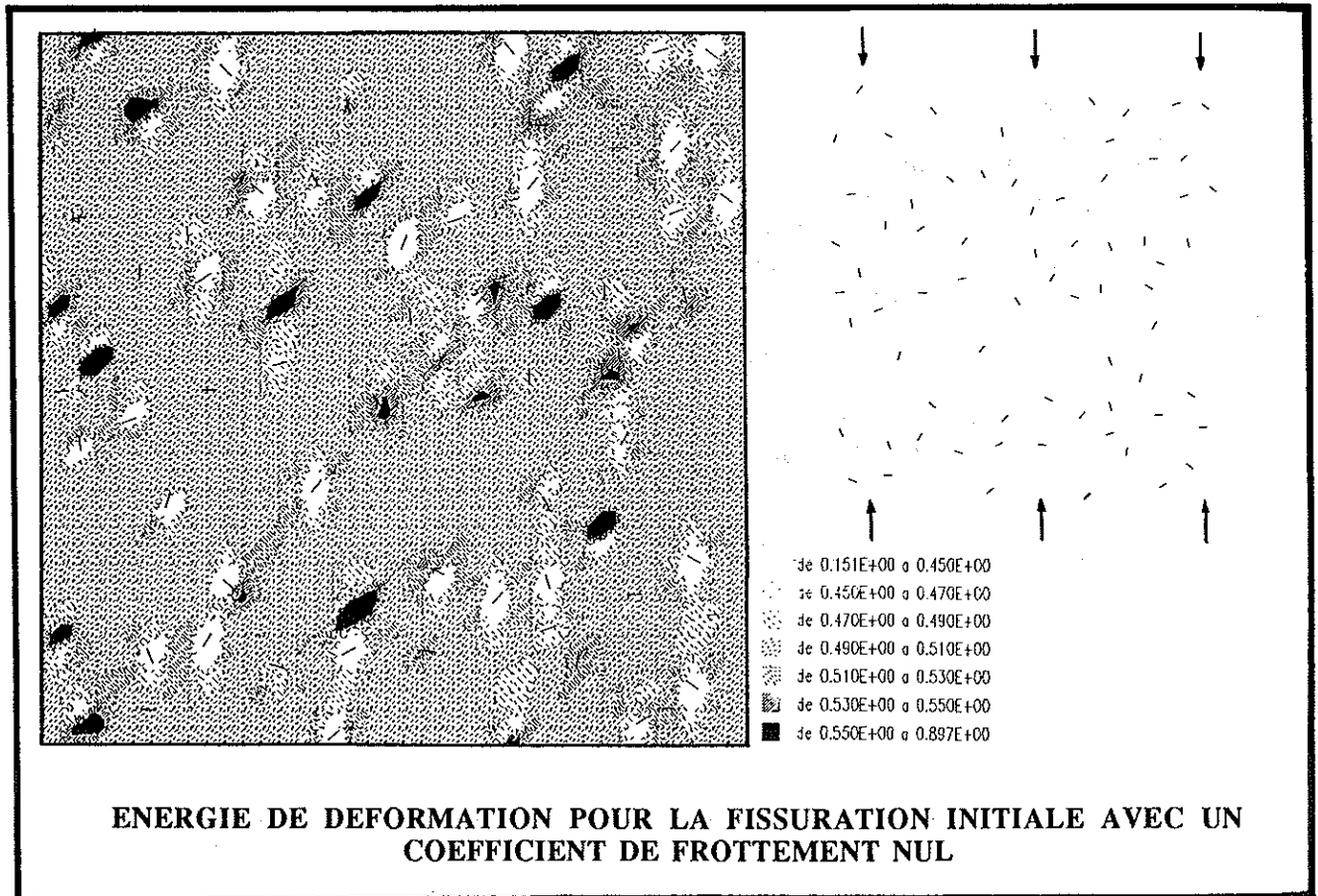


Figure 6. 4. 14

6. 4. 6. FROTTEMENT DEPENDANT DE LA LONGUEUR DE FISSURE

6. 4. 6. 1. GEOMETRIE FINALE

La géométrie des figures 6. 4. 15 à 6. 4. 18 est qualifiée de finale car il faut plus d'énergie pour satisfaire à la dissipation que le bilan création de surface et restitution d'énergie élastique n'en fournit. Les fissures ne sont cependant pas bloquées.

La valeur de ϕ vaut $0,1 e^{a/0,2}$ pour toutes les fissures ($\phi = 0,272$ pour la géométrie initiale). Cette modélisation numérique du contact favorise d'abord la diffusion de la fissuration puis la propagation des fissures verticales sous l'effet des interactions (figure 6. 4. 7). Il faut remarquer ici qu'une fissure verticale en absence d'interaction n'est pas chargée par une compression simple verticale.

Toutefois les interactions en terme d'énergie de déformation sont quasiment absentes dans le milieu (figure 6. 4. 16). Seules les pressions fictives dans les fissures ressentent quelque peu les effets des interactions. On ne peut pas affirmer que les interactions organisent la localisation des déformations.

La carte des isovaleurs des contraintes principales d'extension ne montre pas d'augmentation significative du "coefficient de Poisson global". L'angle du repère principal (en degrés sur la figure 6. 4. 18) est peu affecté par la présence des fissures. Ces conclusions sont bien sûr liées à l'exemple choisi.

6. 4. 6. 2. CAS AVEC UNE FISSURE LONGUE

Le cas d'une fissure plongée dans un domaine comportant des fissures de plus petites tailles informe sur la possibilité de propagation d'une zone endommagée en front de la grande fissure [CHUDNOVSKI 87] et la propagation de celle-ci.

La géométrie des figures 6. 4. 18 à 6. 4. 25 est celle de la géométrie finale dans laquelle une fissure est au moins cinq fois plus longue que toutes les autres. Le milieu est toujours infini. La fissure longue étant orientée presque sur la verticale elle est faiblement chargée mais peut décharger des fissures voisines. Une fois de plus cet effet ne prend pas de proportion notable dès qu'on s'écarte des fissures. La comparaison des figures 6. 4. 17 et 6. 4. 24 illustre cette tendance avec les contraintes de tractions.

Le représentation des déplacements liés aux fissures (figure 6. 4. 25) est obtenue en retranchant du champ de déplacement de la structure fissurée le champ de déplacement qui serait obtenu si le milieu était non fissuré. Cette visualisation rend de l'amplitude des déplacements que provoque une "grande" fissure en regard des autres fissures plus chargées mais plus petites.

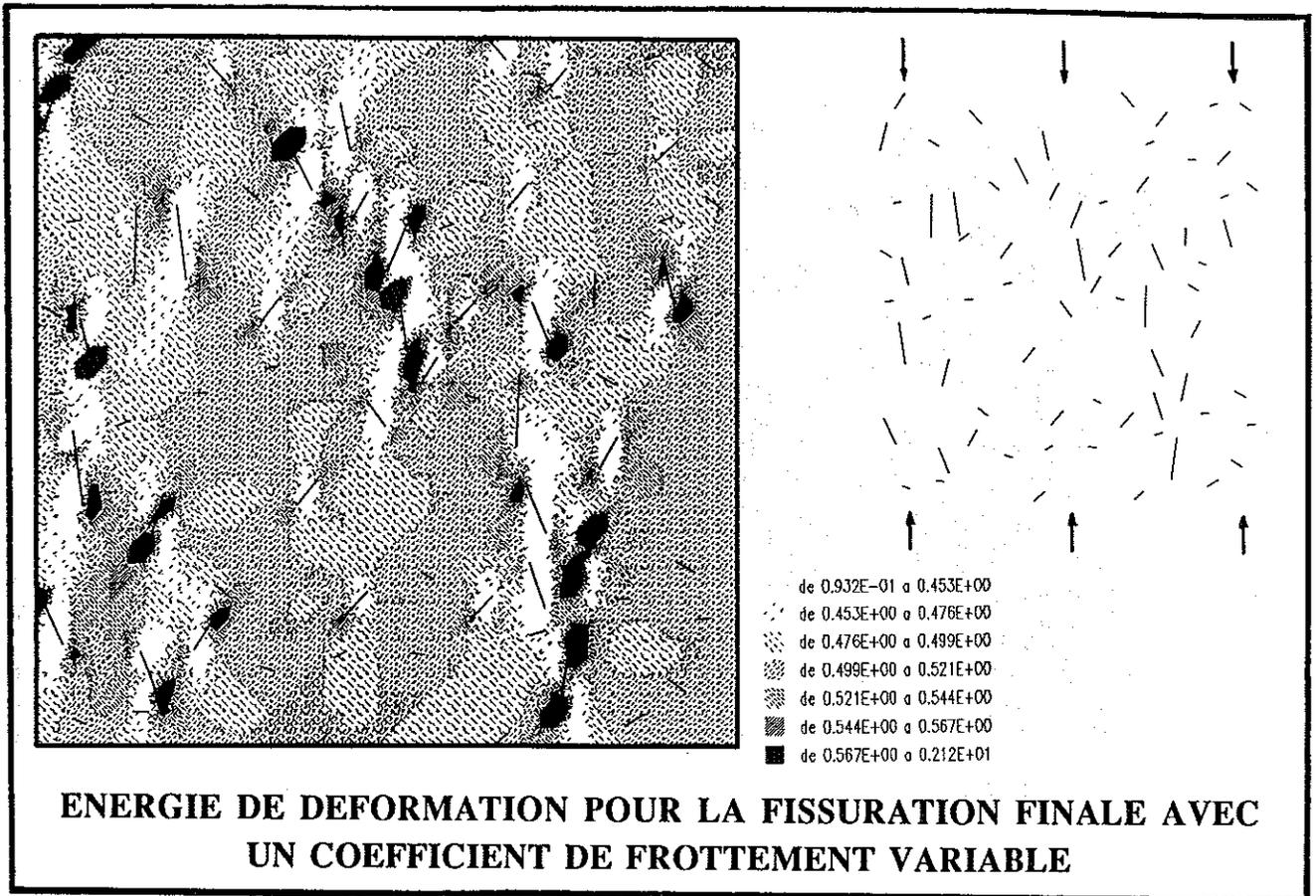


Figure 6. 4. 15

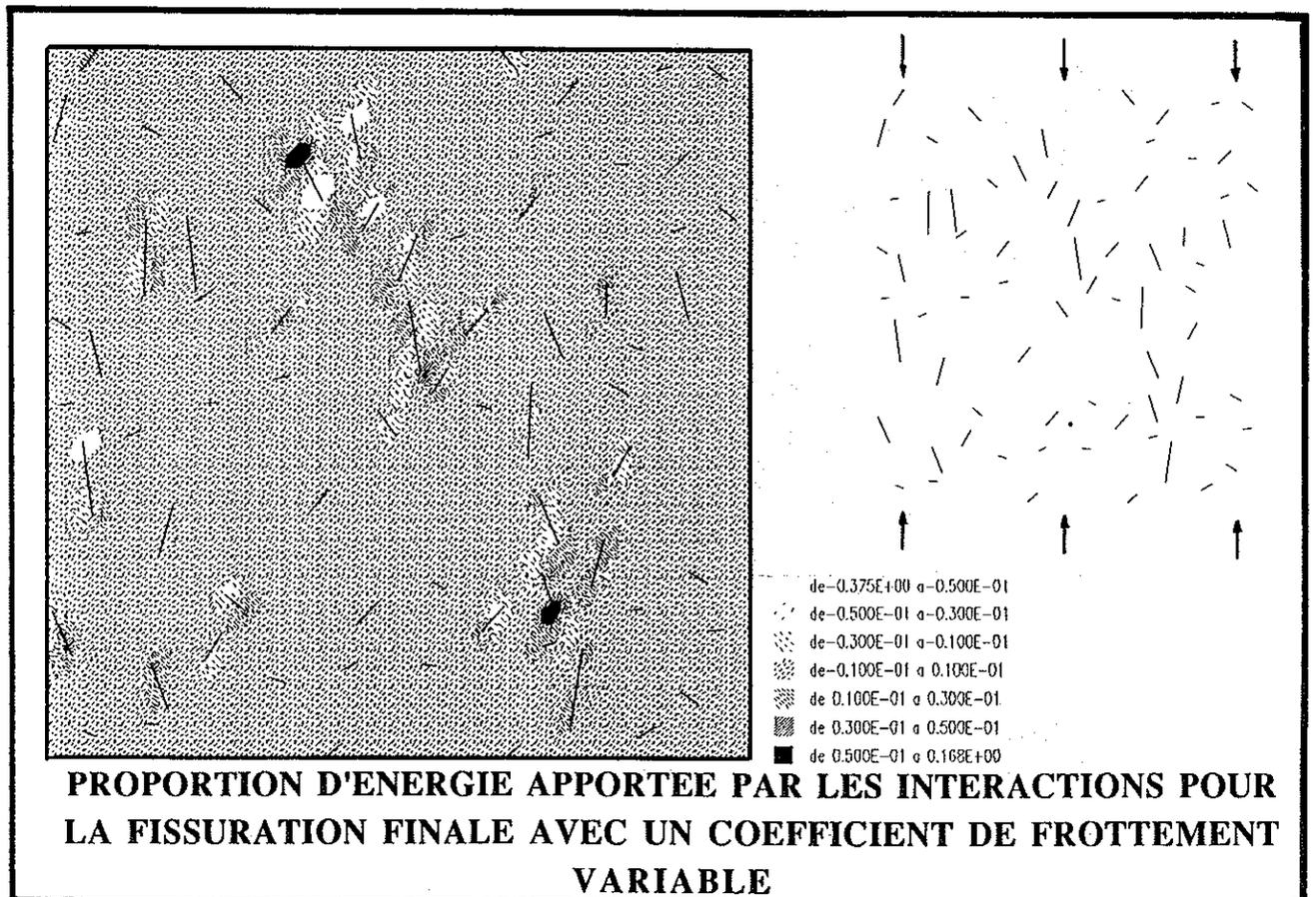


Figure 6. 4. 16

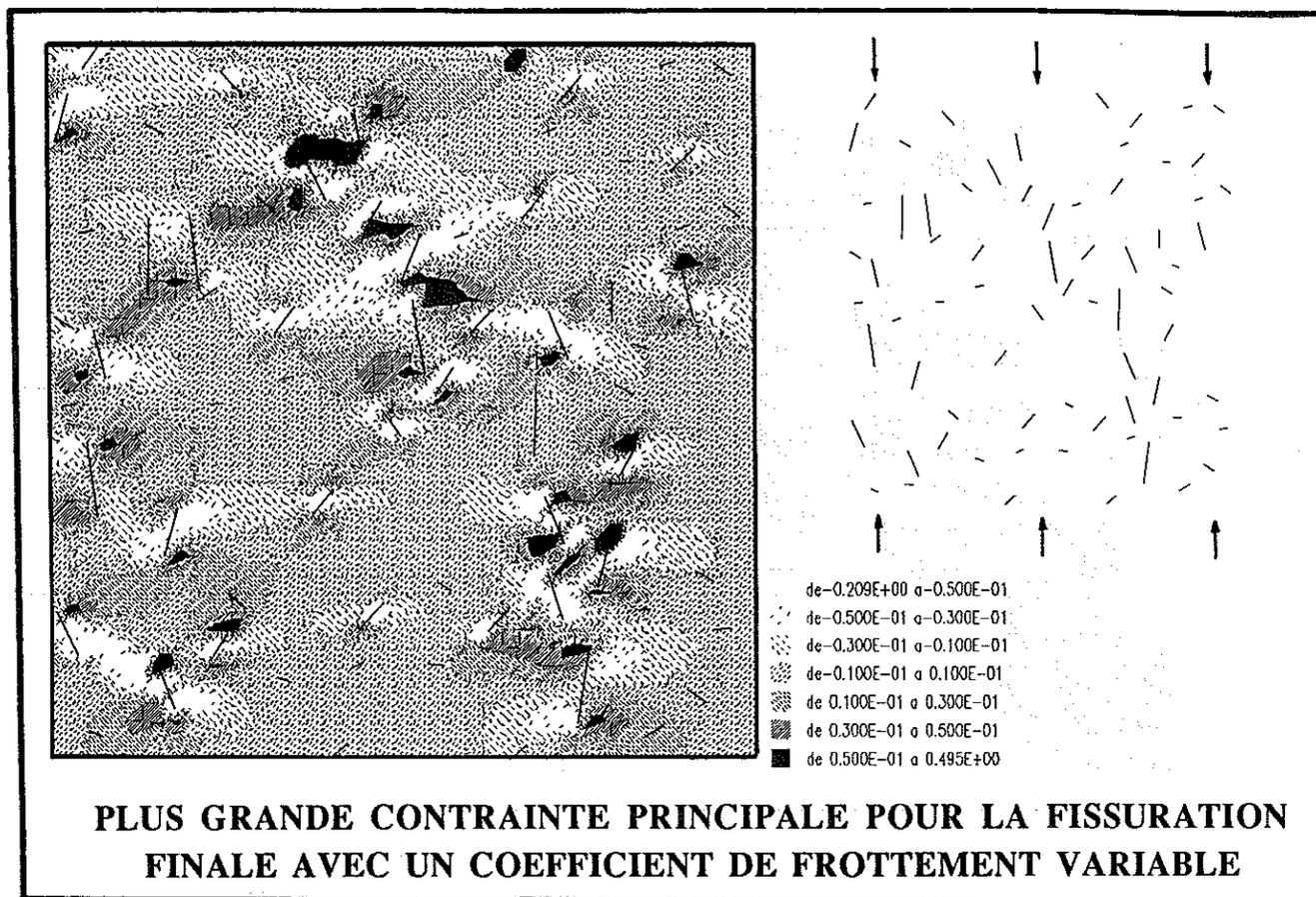


Figure 6. 4. 17

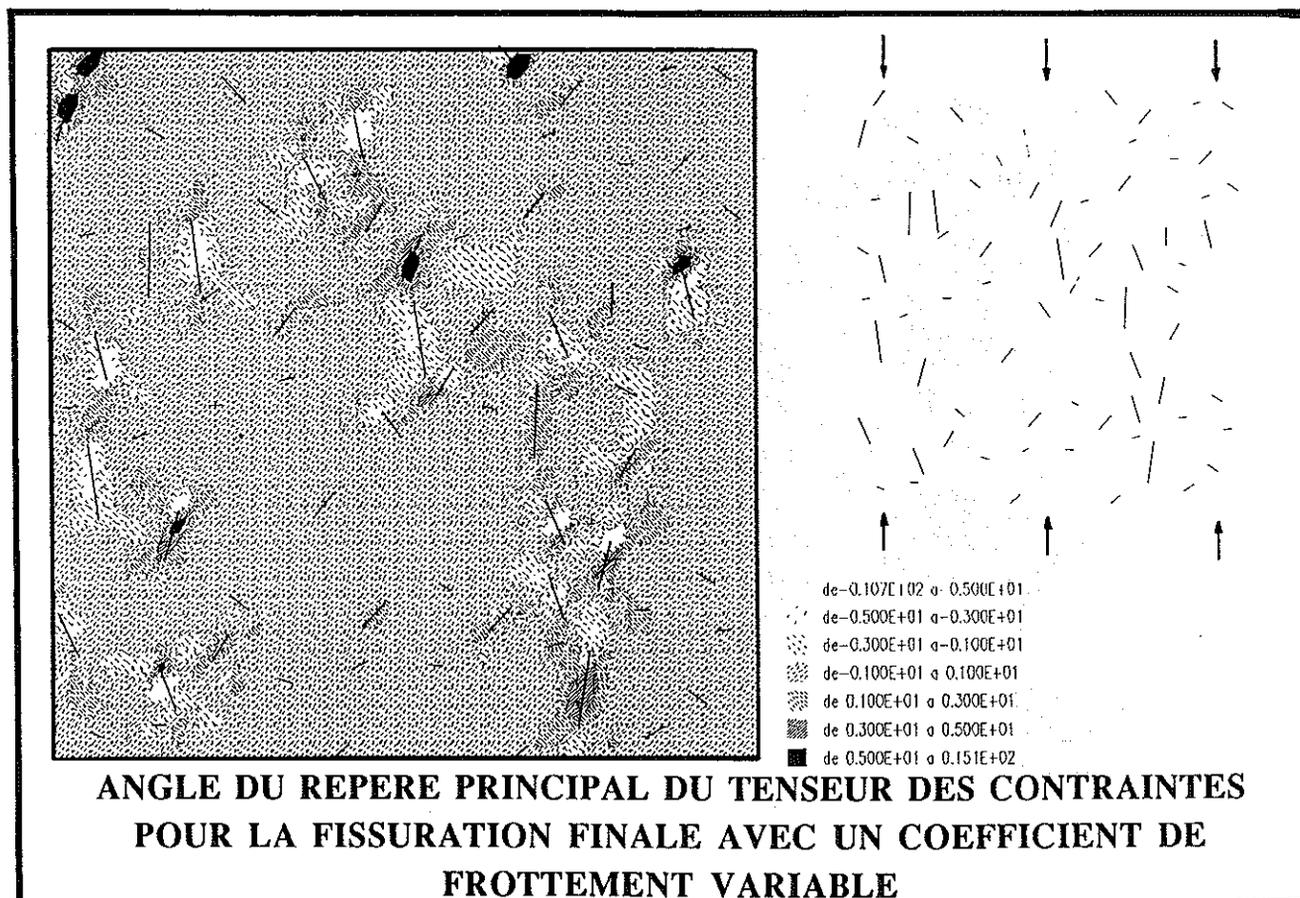


Figure 6. 4. 18

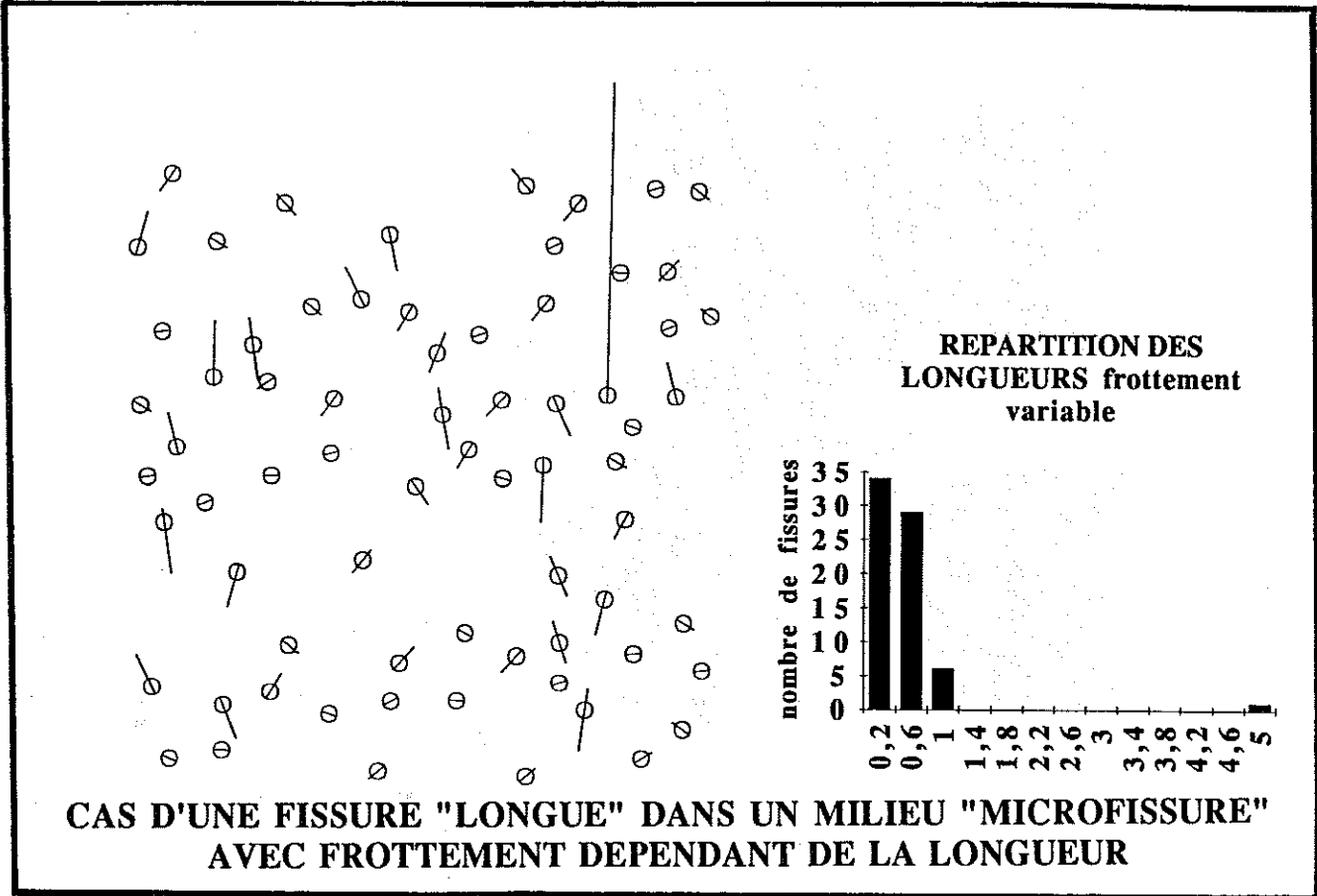


Figure 6. 4. 19

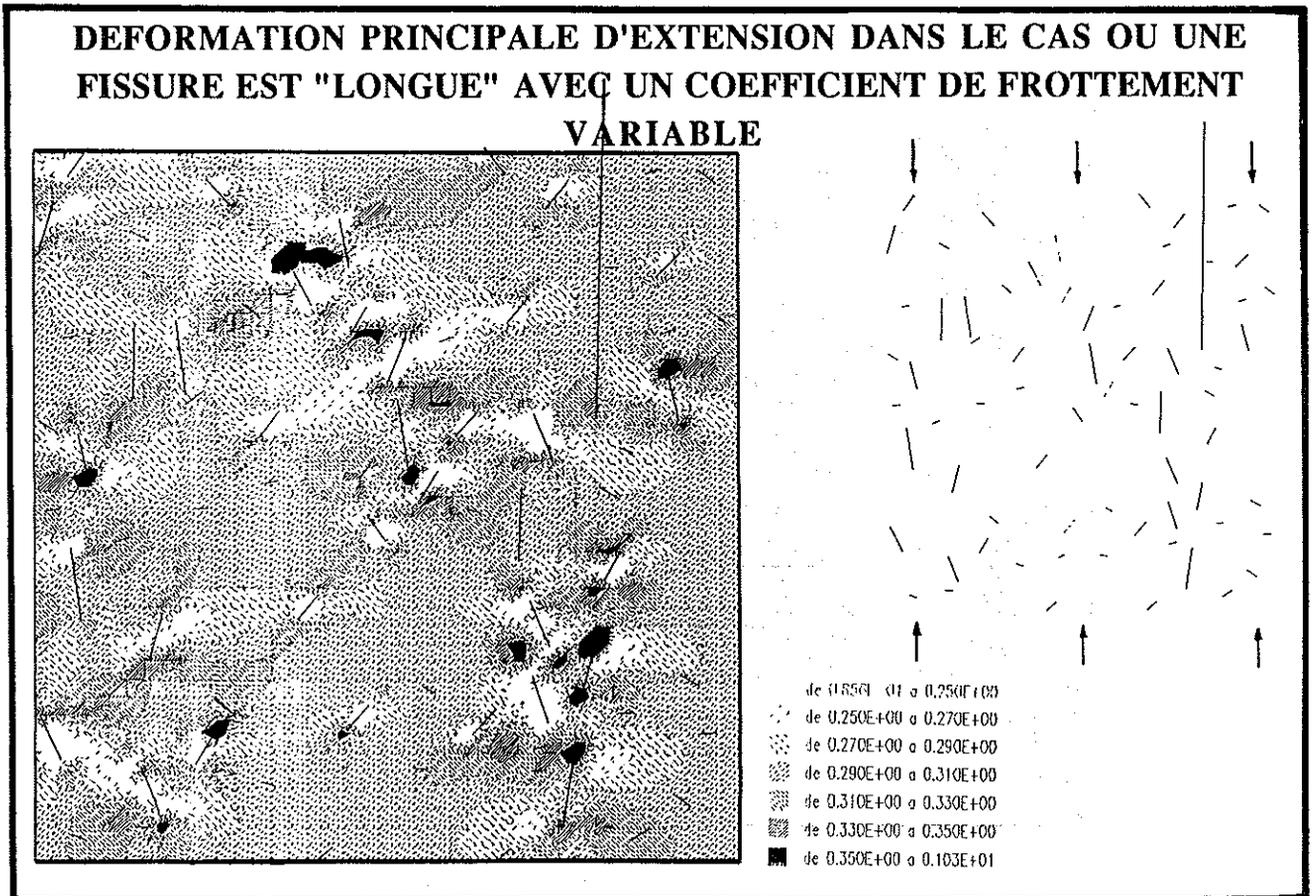


Figure 6. 4. 20

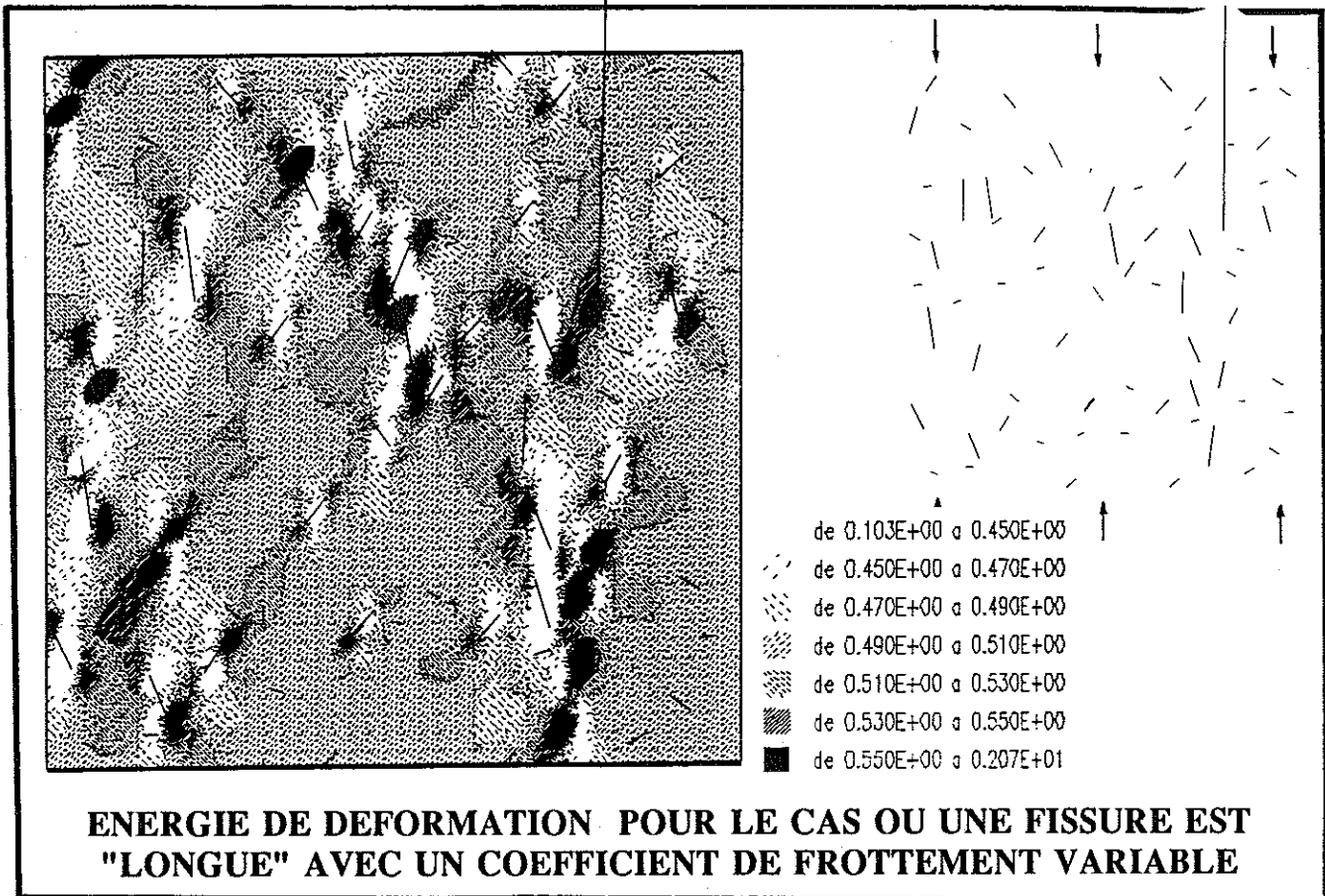


Figure 6. 4. 21

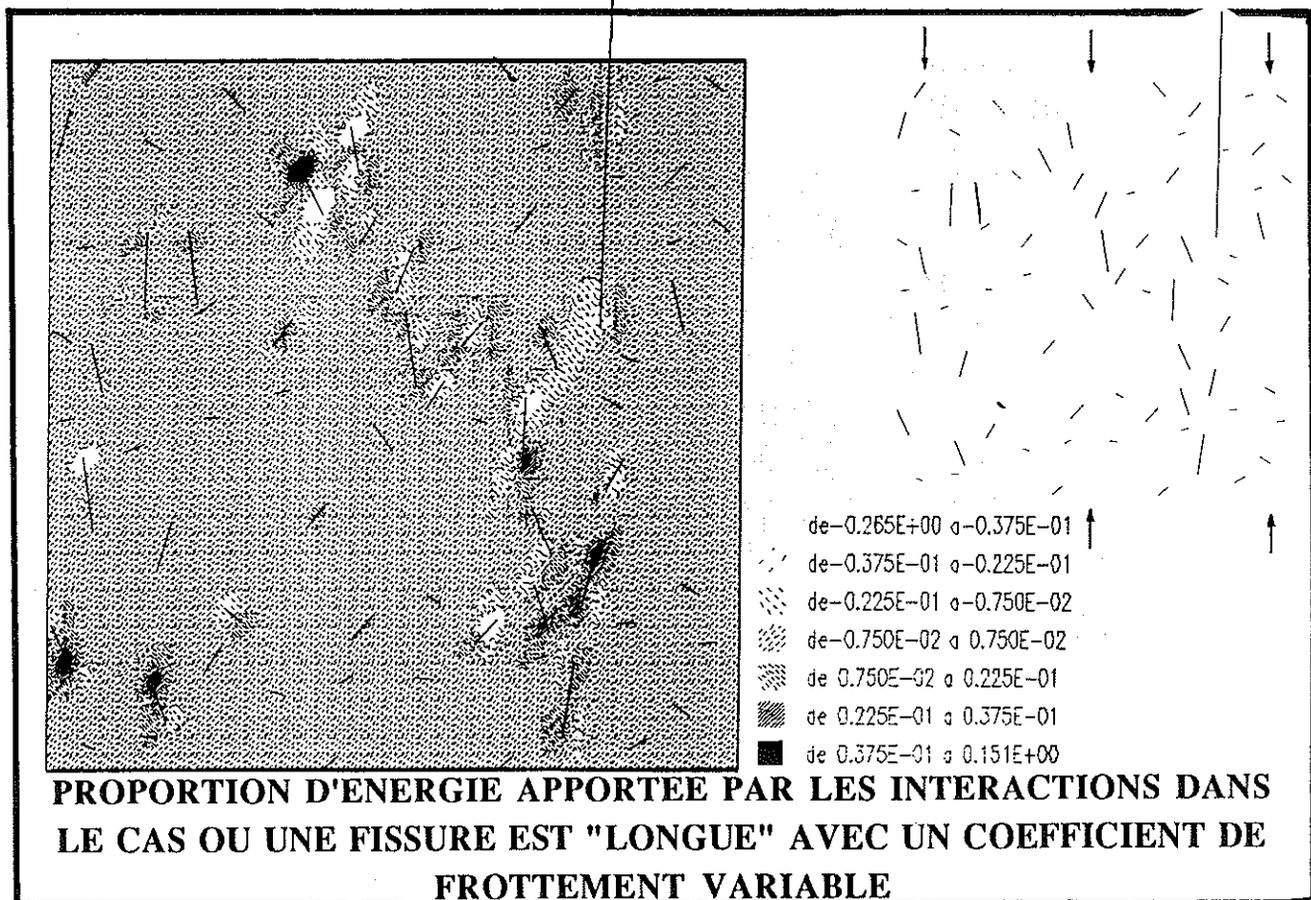


Figure 6. 4. 22

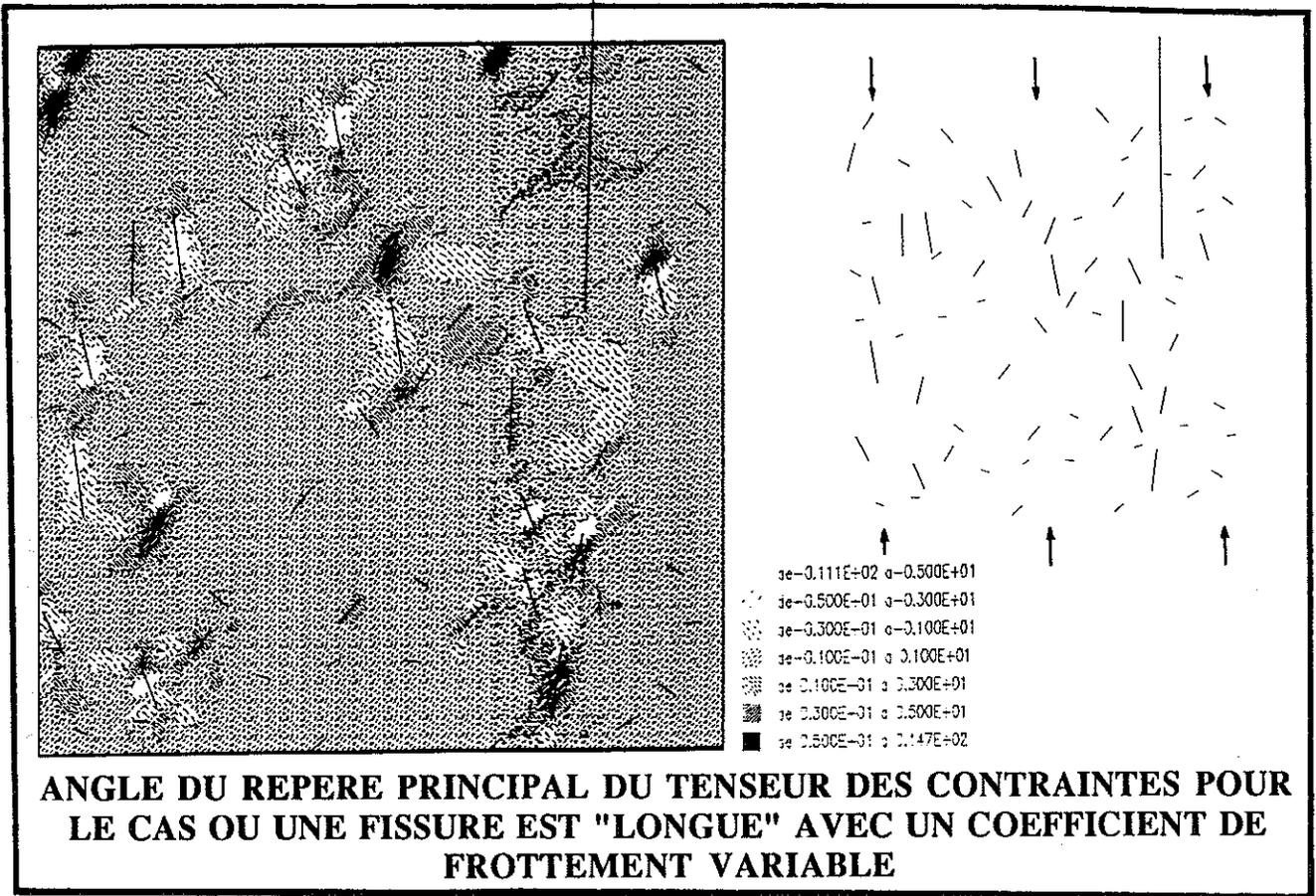


Figure 6. 4. 23

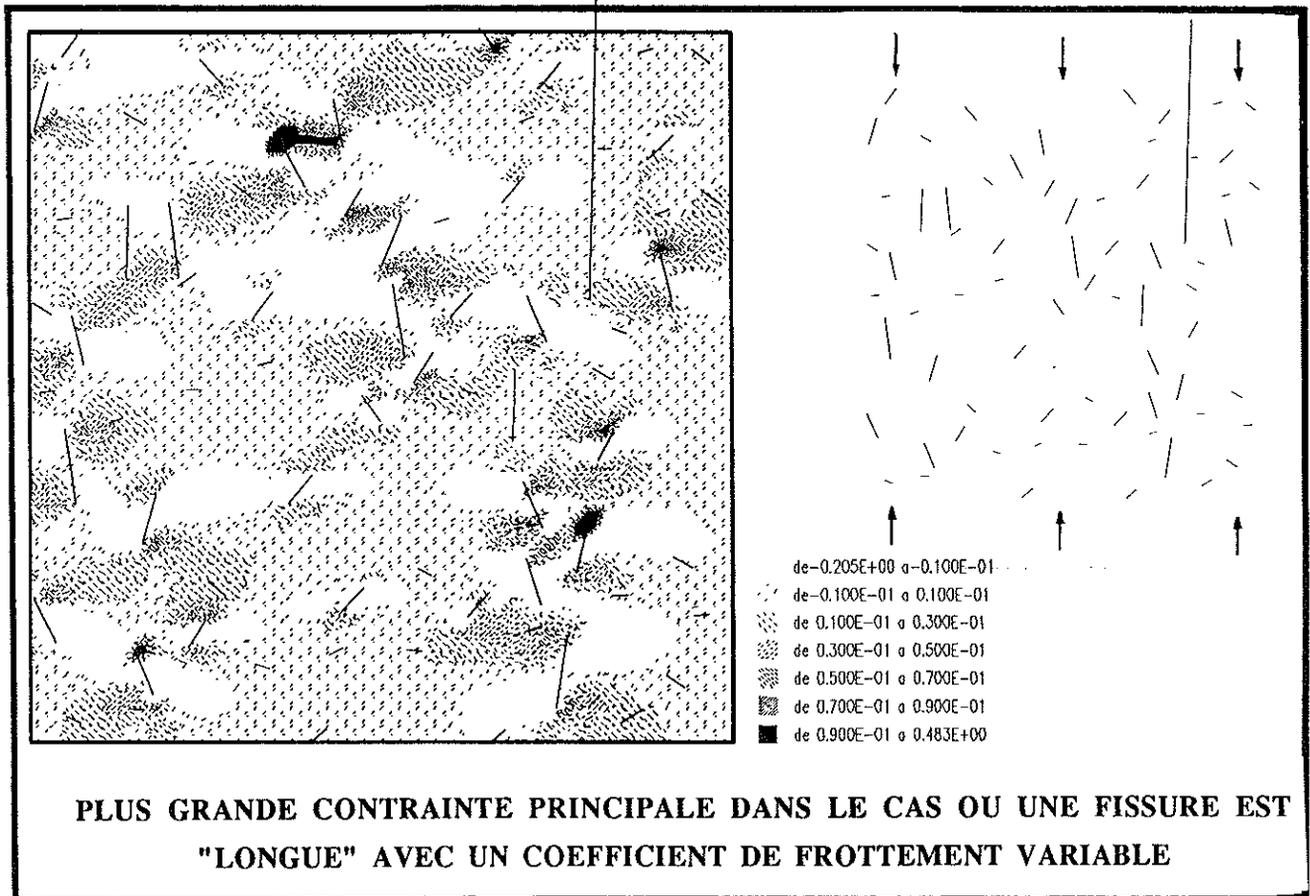
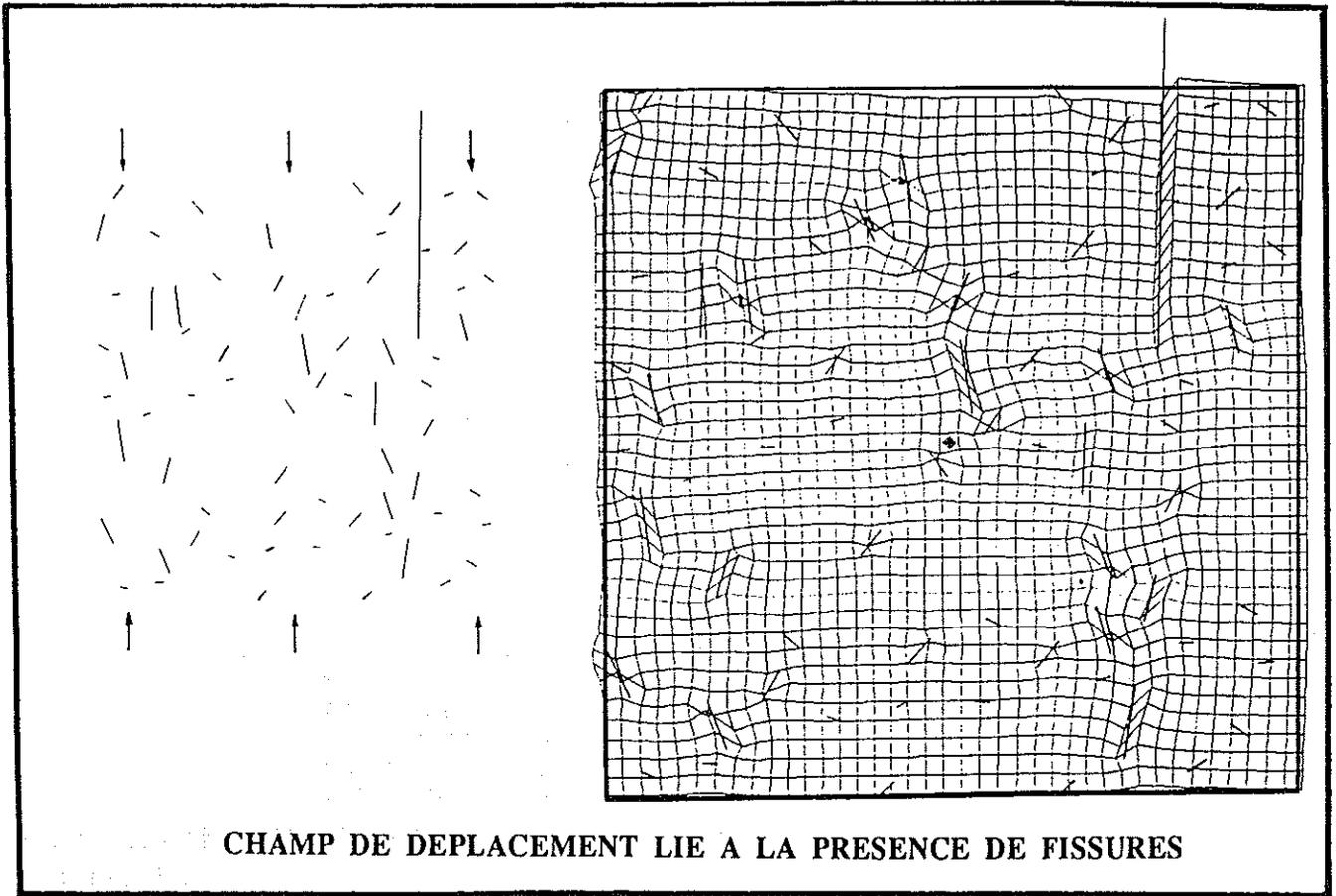


Figure 6. 4. 24



CHAMP DE DEPLACEMENT LIE A LA PRESENCE DE FISSURES

Figure 6. 4. 25

6. 4. 7. MILIEU CONTENANT DES FISSURES ET DES CAVITES CIRCULAIRES

6. 4. 7. 1. GEOMETRIE INITIALE

La géométrie initiale reprend pour permettre les comparaisons les positions des fissures des cas précédents pour substituer à 20 fissures 20 cavités circulaires. Le rayon de ces "pores" correspond à la longueur initiale d'une fissure. Les figures 6. 4. 8 et 6. 4. 27 à 6. 4. 30 reflètent l'état de sollicitation de la structure pour un coefficient de frottement de 0,5.

Les pores étant de relativement grande taille dans cet exemple l'effet des interactions en terme d'énergie de déformation est de l'ordre de 10 %. Quoique faible les interactions semblent organiser l'énergie sur un axe vertical. La fissure qui va se propager (figure 6. 4. 8) en fonction du coefficient de frottement et du critère choisi ressent la présence d'un pore : l'énergie étant plus faible localement cette zone constitue un point faible de la structure.

6. 4. 7. 2. GEOMETRIE APRES PROPAGATION

Le coefficient de frottement étant constant et la première fissure qui se propage devenant la plus grande, le taux de restitution d'énergie (puisqu'il constitue notre critère) favorisera par la suite la propagation de celle-ci. Cette fissure se propage vers l'extérieur du domaine fissuré. On constate sur les figures 6. 4. 32 à 6. 4. 38 qu'un champ compressif dirige la propagation en ce sens. La figure 6. 4. 38 représente le champ des déplacements liés aux fissures et aux pores. Comme on peut s'y attendre en utilisant les équations du chapitre 4. ; (portée des paramètres) les pores perturbent bien plus le milieu que les fissures. D'autres distributions géométriques permettraient de confirmer ces tendances.

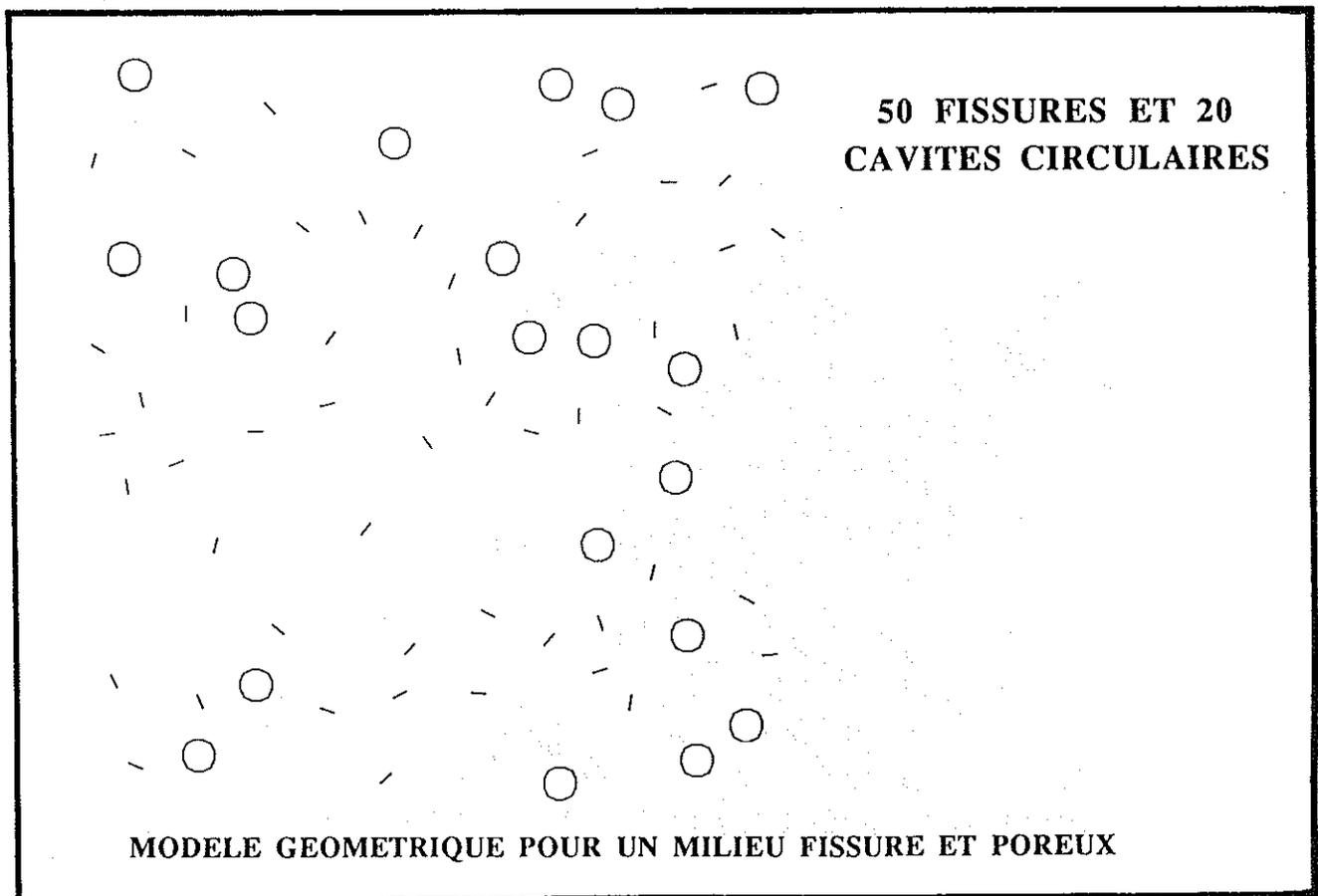


Figure 6. 4. 26

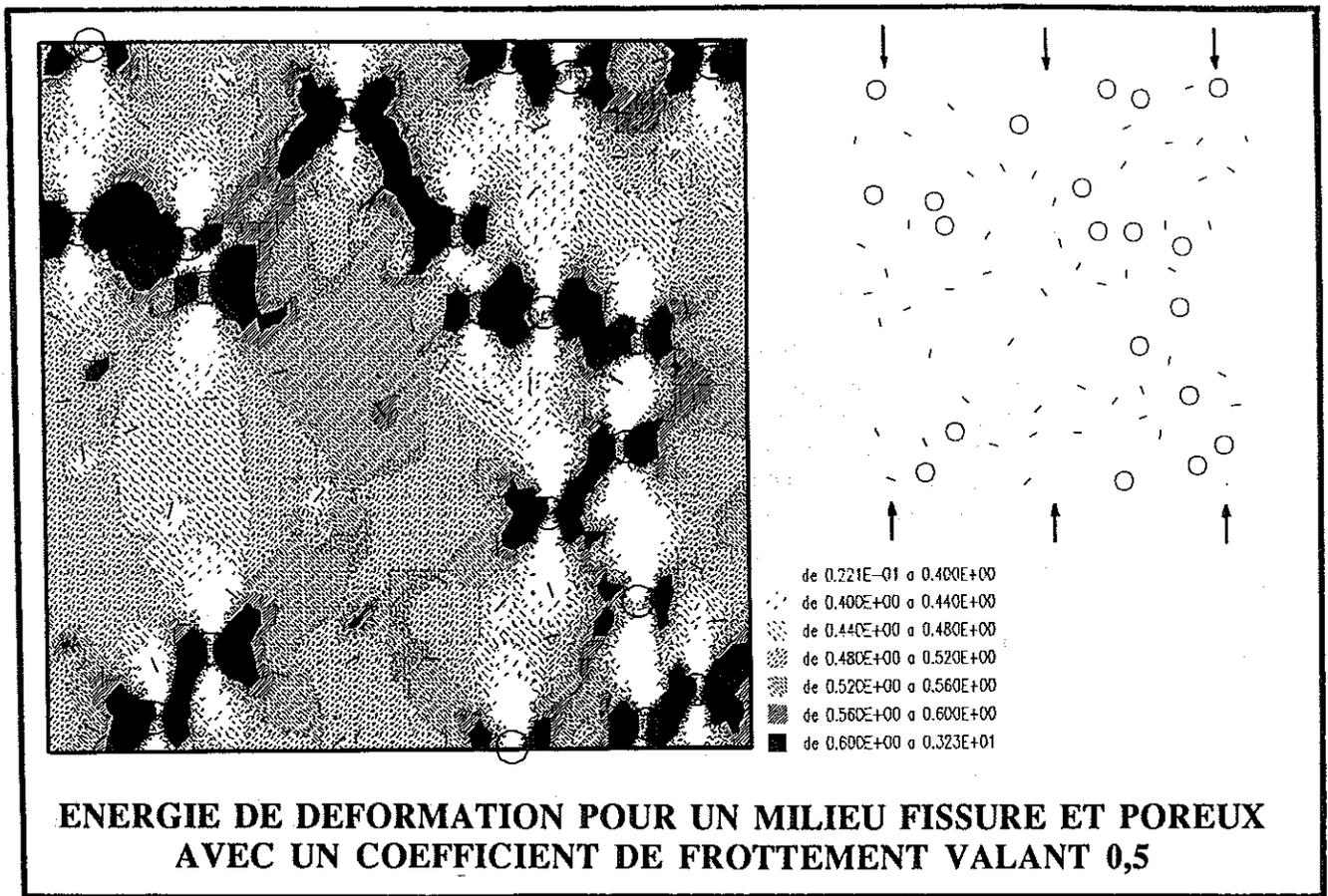


Figure 6. 4. 27

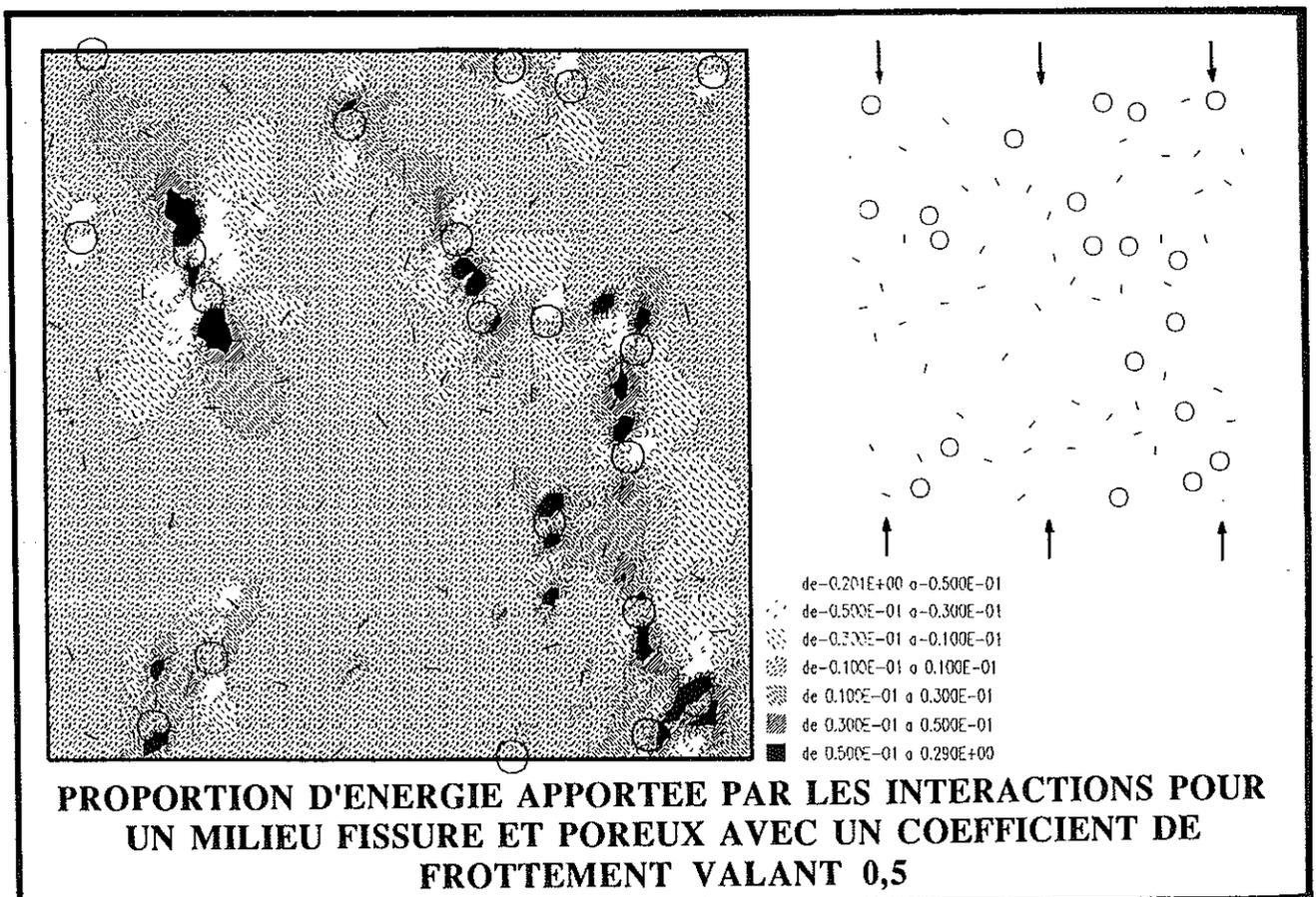


Figure 6. 4. 28

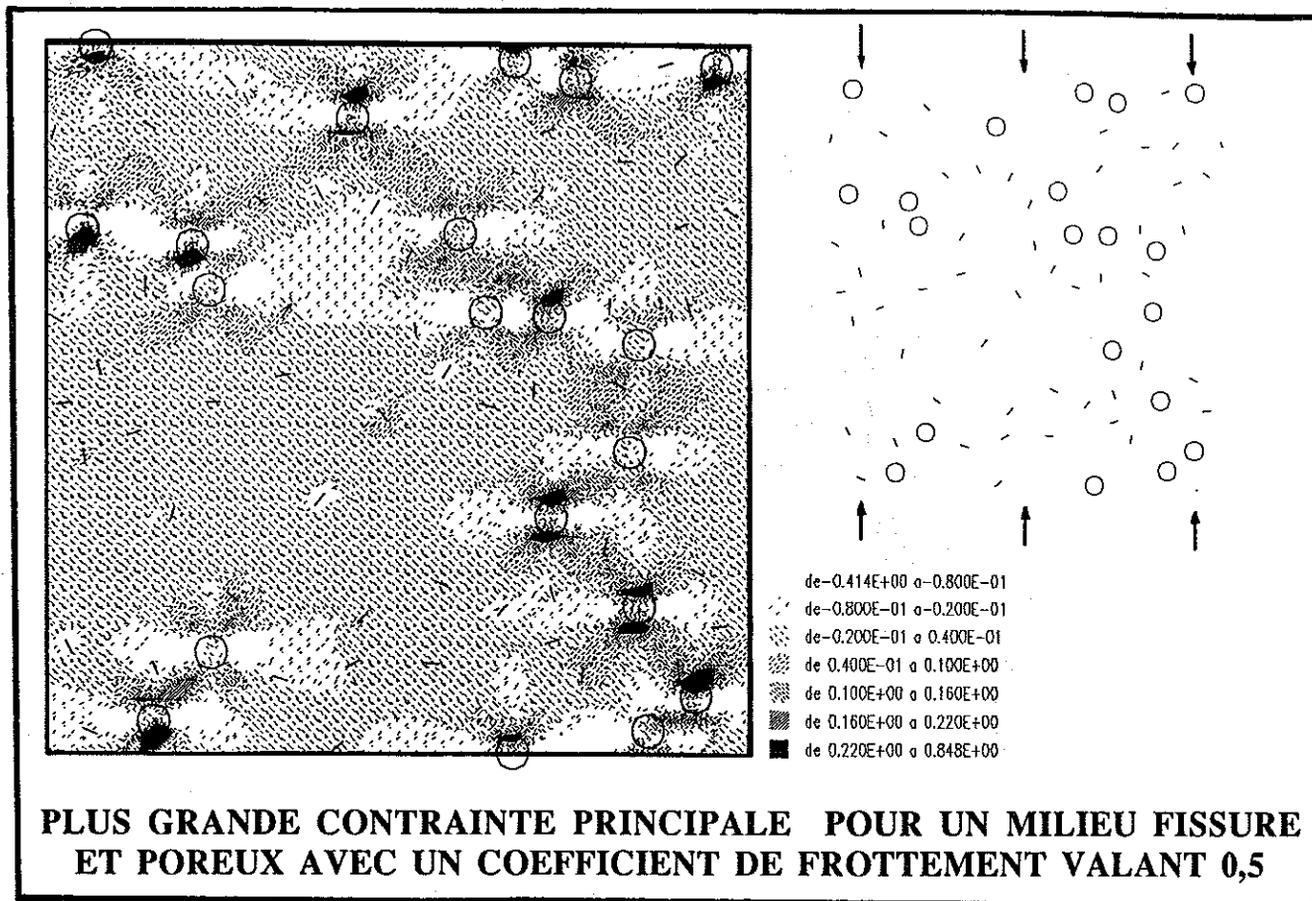


Figure 6. 4. 29

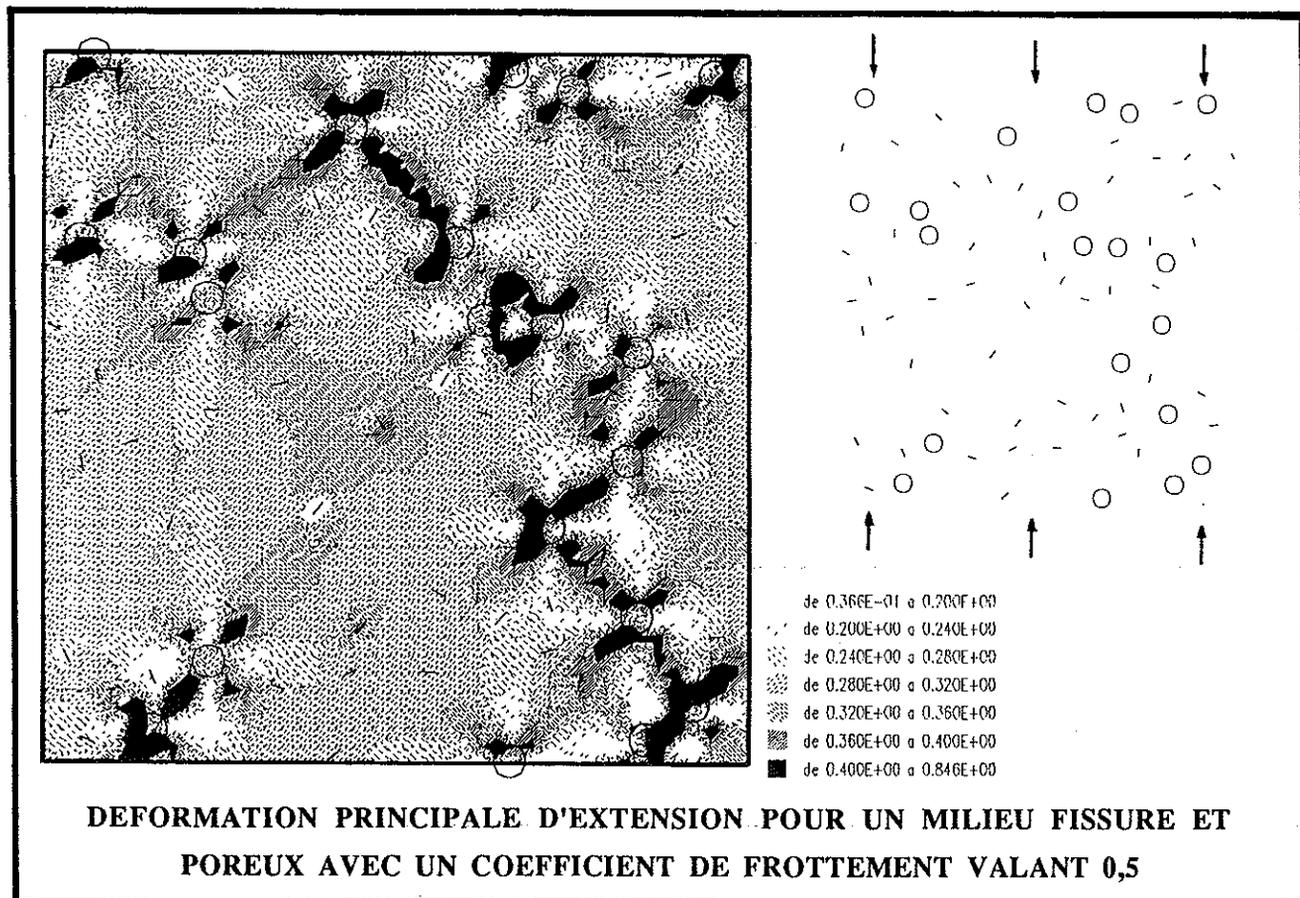


Figure 6. 4. 30

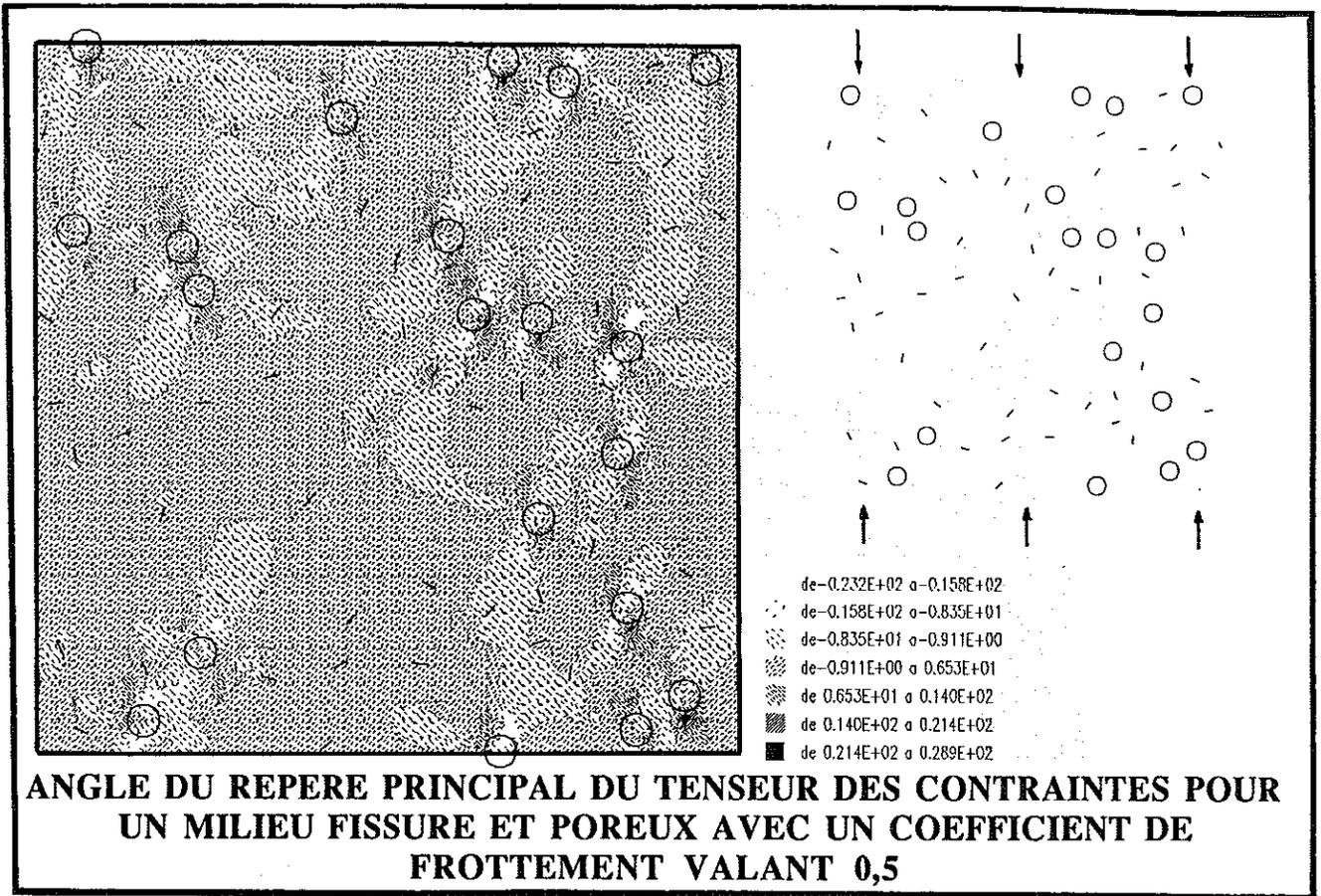


Figure 6. 4. 31

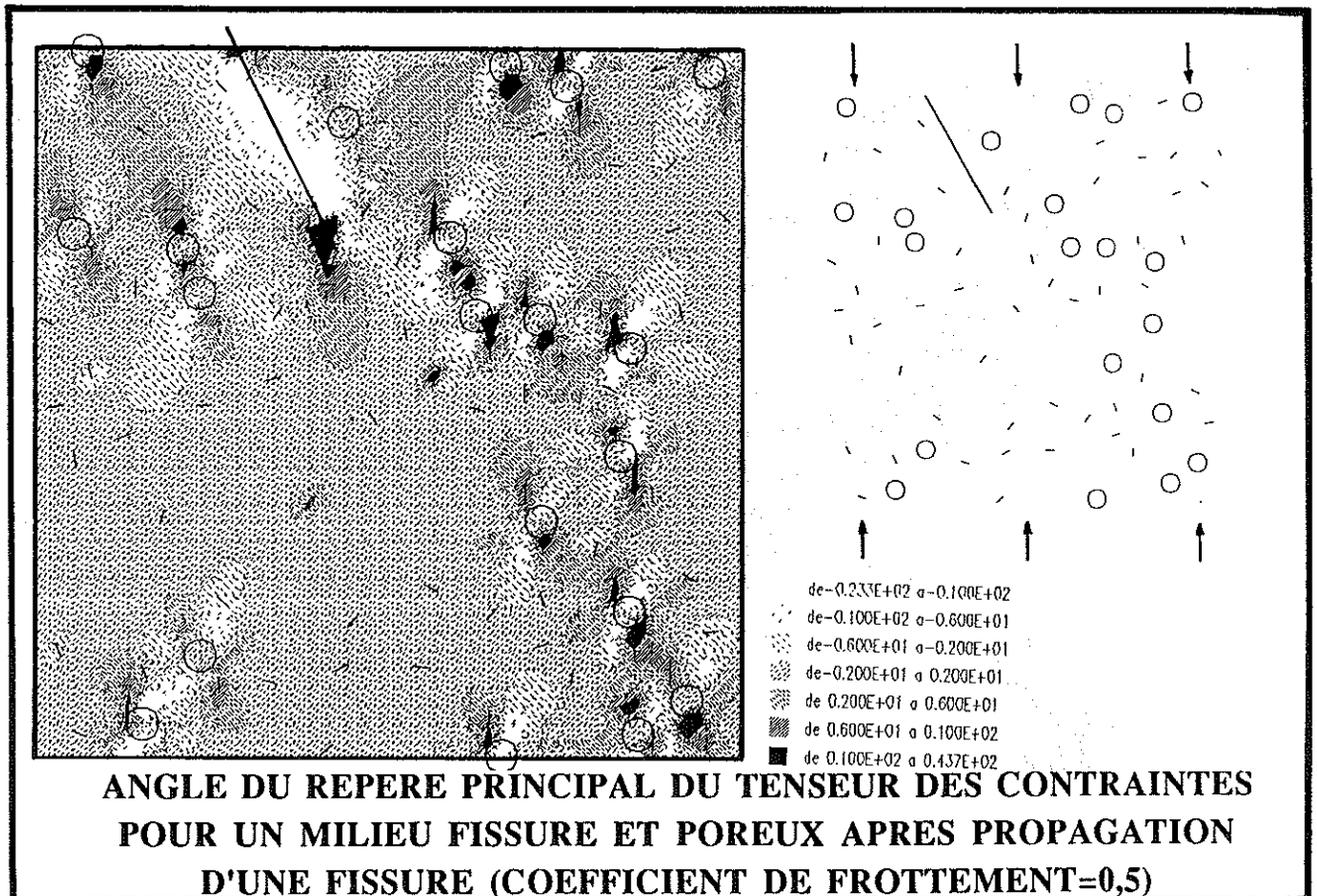


Figure 6. 4. 32

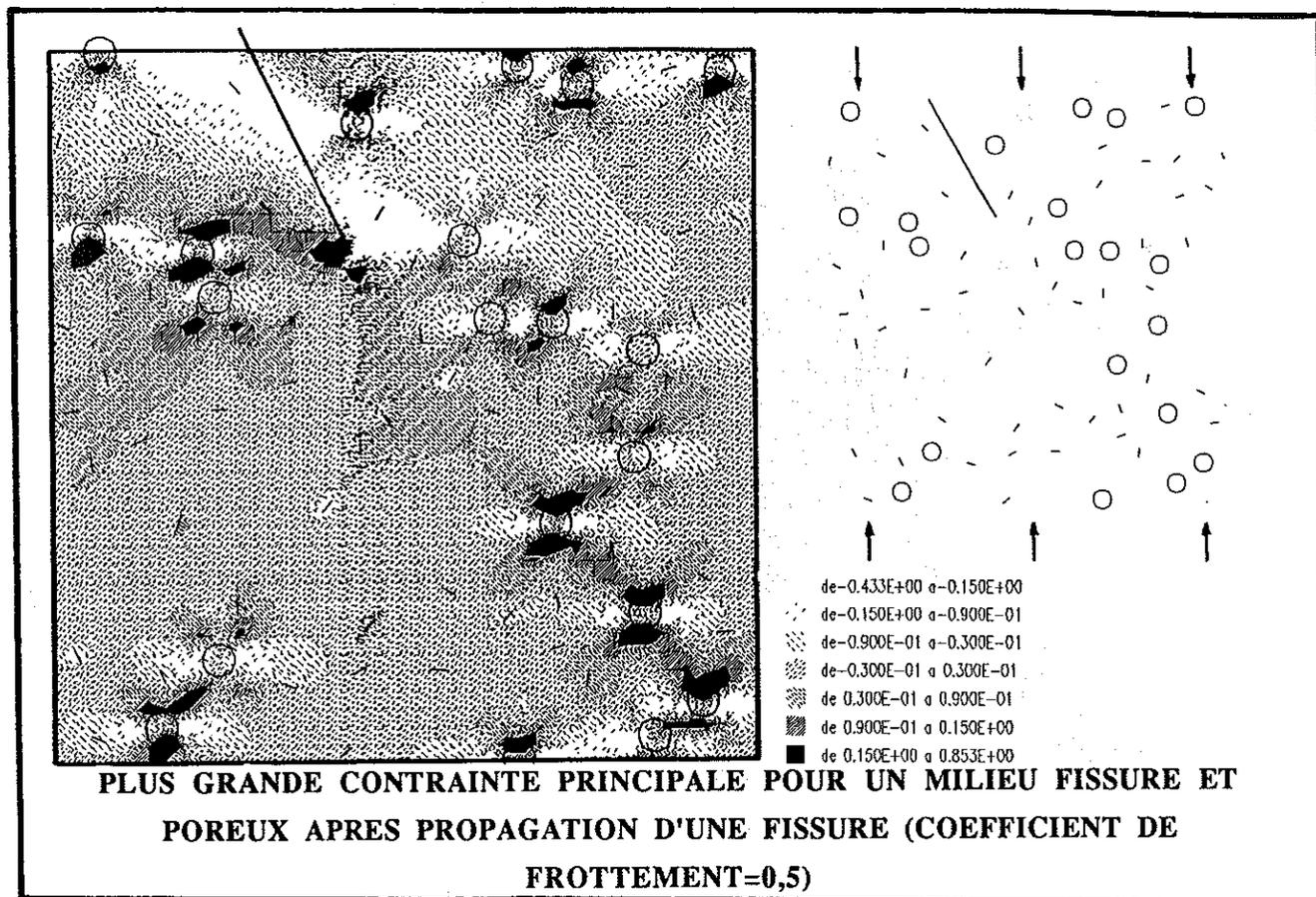


Figure 6. 4. 33

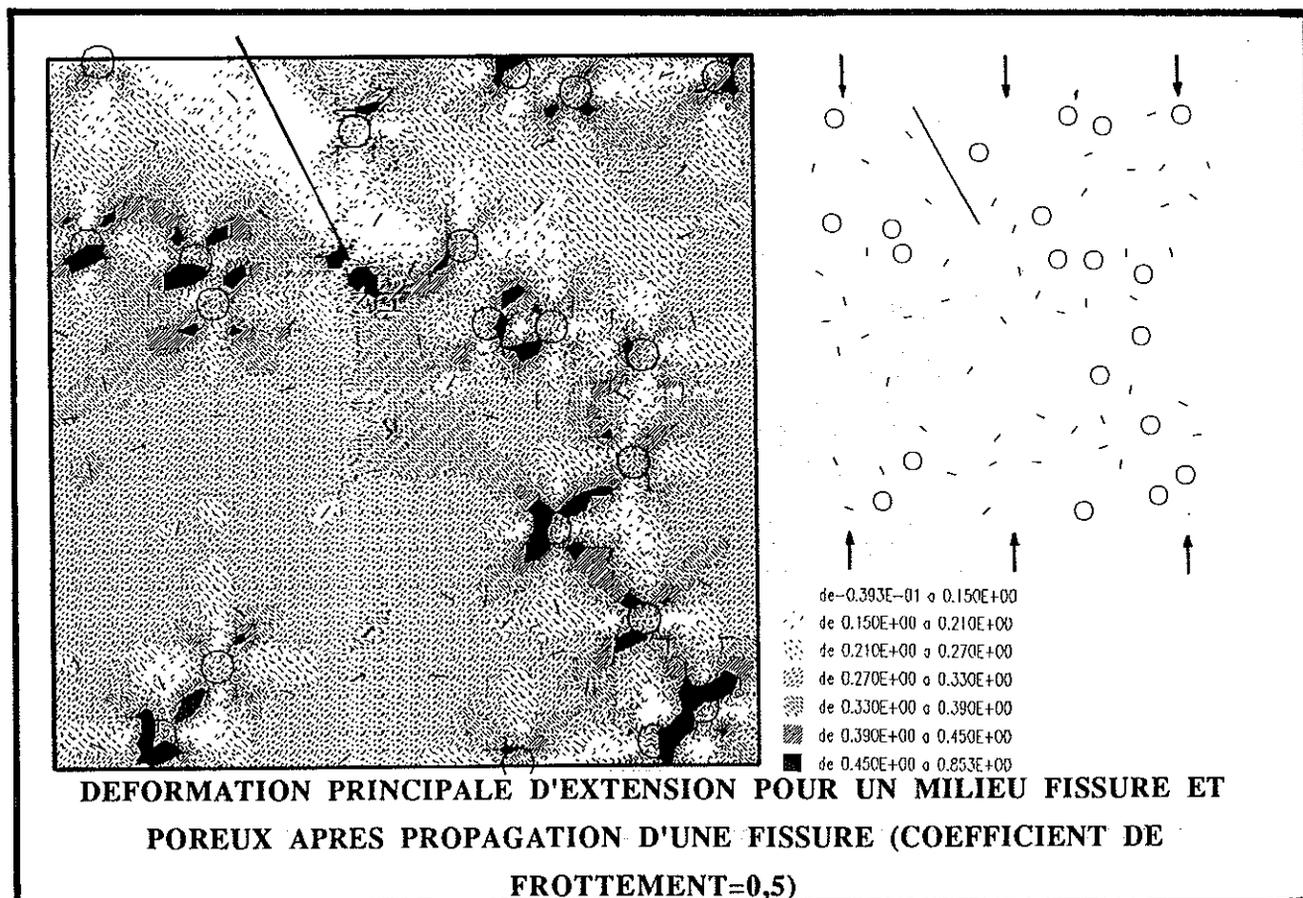


Figure 6. 4. 34

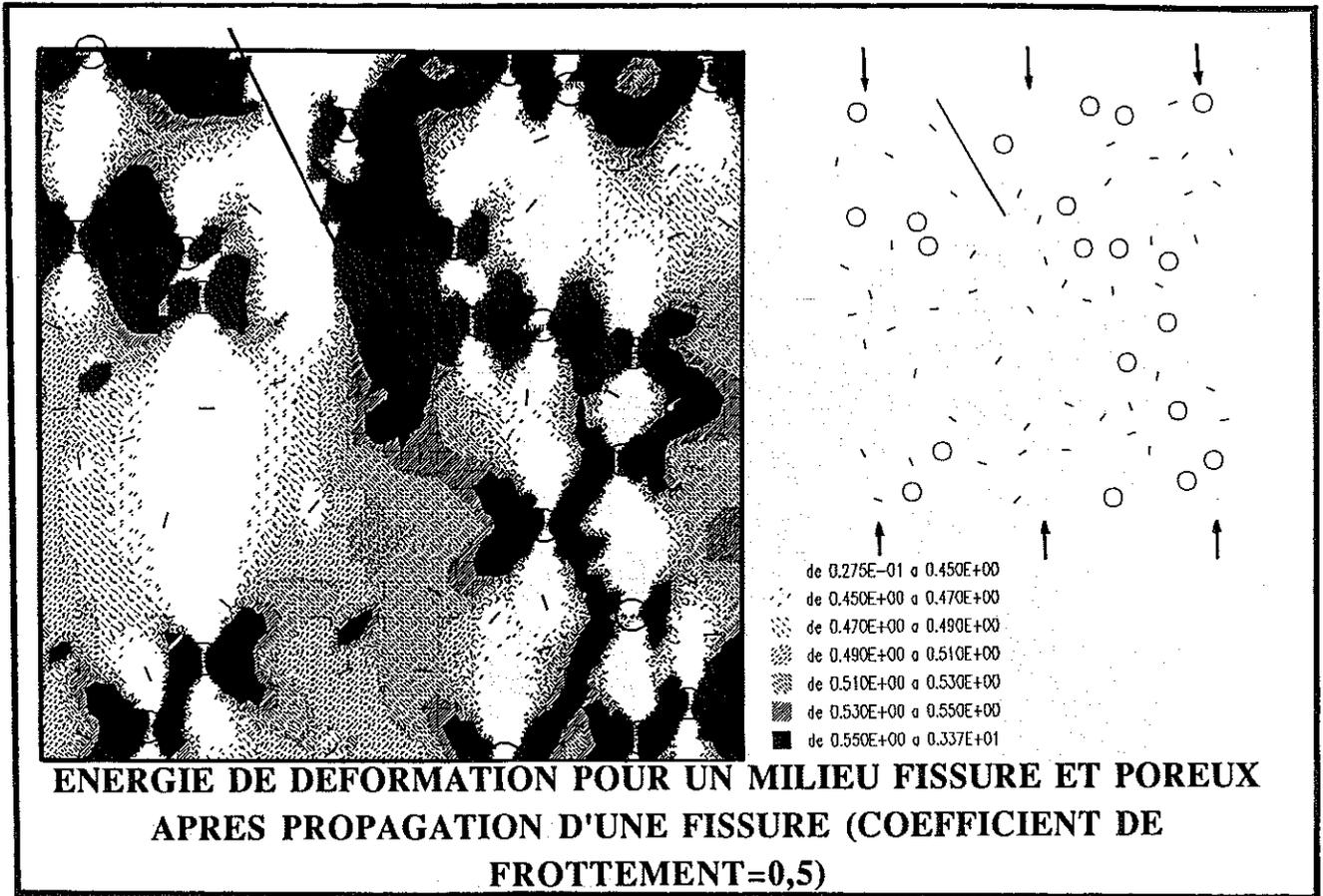


Figure 6. 4. 35

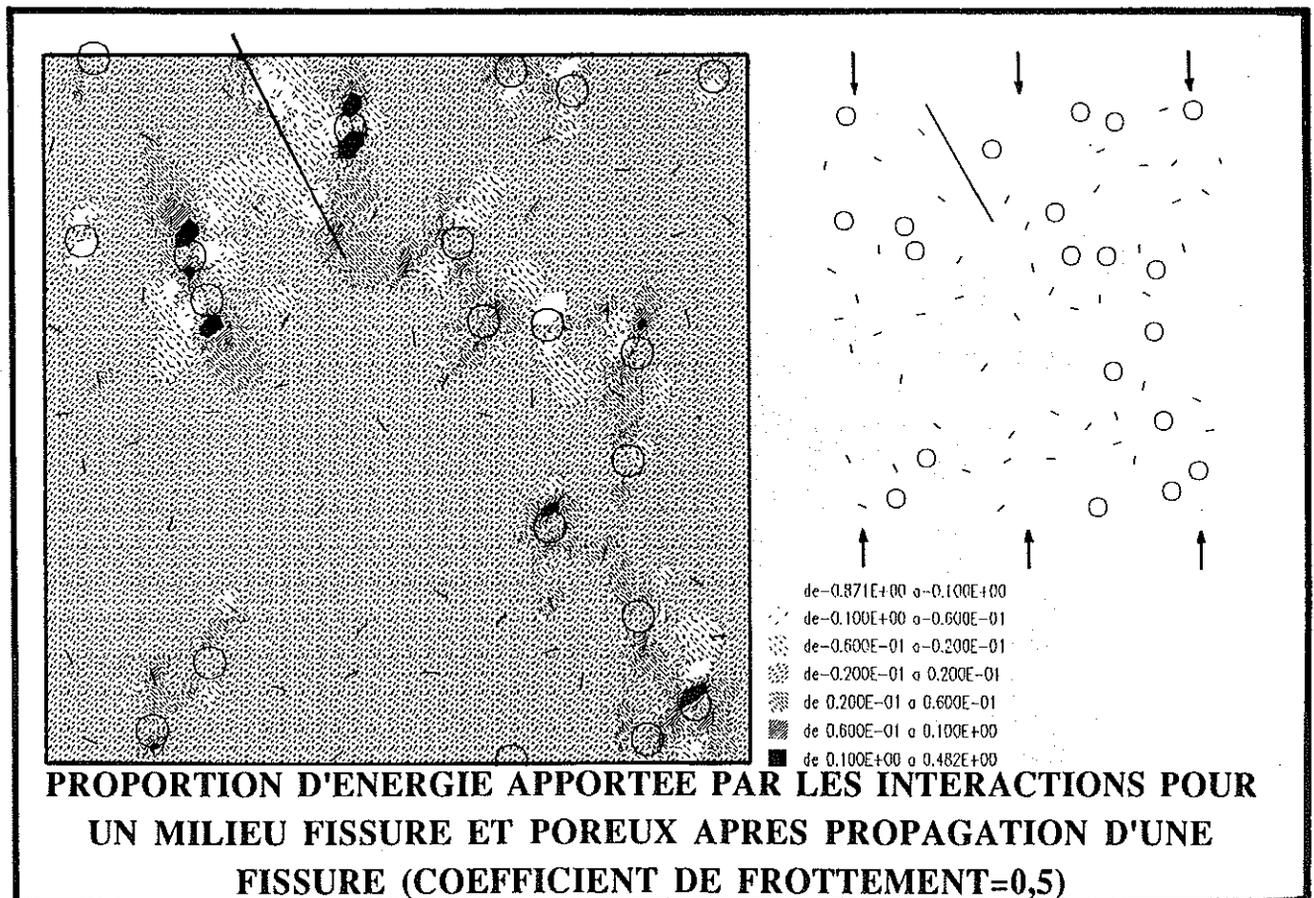


Figure 6. 4. 36

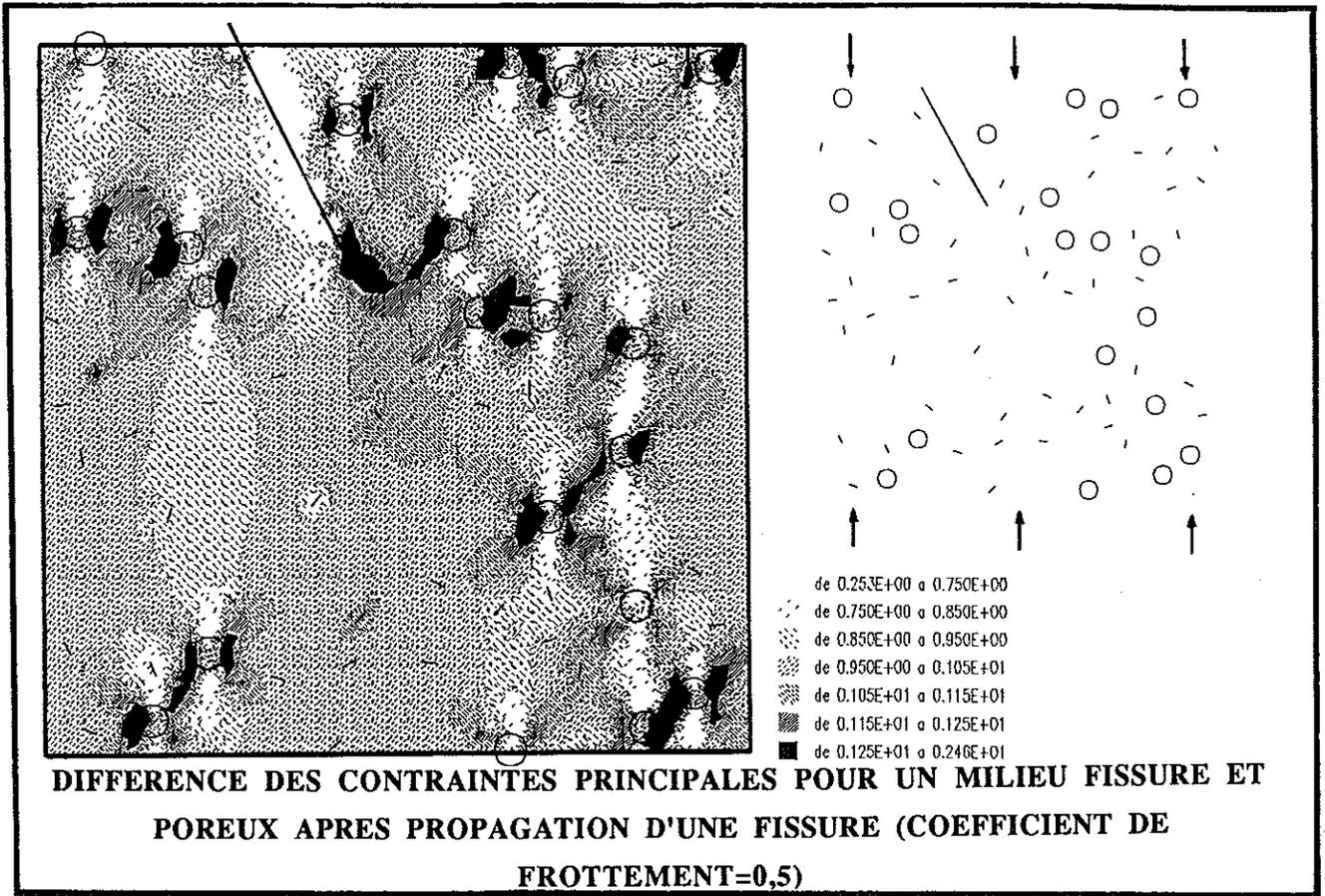


Figure 6. 4. 37

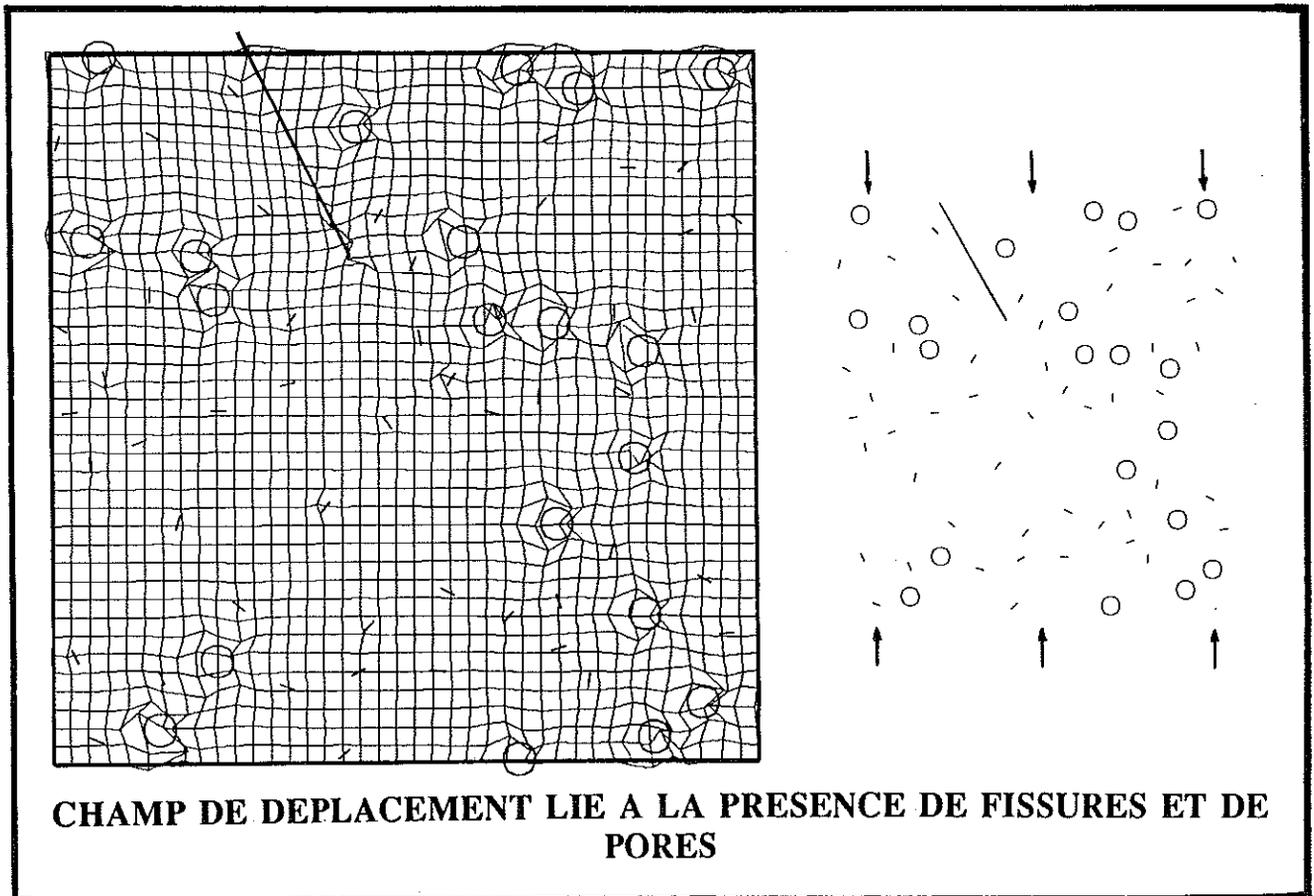


Figure 6. 4. 38

6. 5. FISSURES REPARTIES AU HASARD DANS UNE BANDE

6. 5. 1. CAS ENVISAGES

Les ruptures dans les sols font couramment apparaître des bandes de cisaillement. Ces bandes ont leur équivalent dans certains matériaux continus comme on peut l'observer sur le profil de fissuration de l'éprouvette en mortier normal de la figure 6. 3. 1 .

Considérant la difficulté de modéliser numériquement l'apparition d'une telle géométrie de fissuration (chapitre précédent) nous avons choisi d'envisager le problème à l'envers. Des fissures droites sont réparties dans un rectangle fictif de dimension $d \times 10d$ (figure 6. 5. 9). Leurs longueurs sont aléatoirement choisies entre $d/20$ et $d/200$, la distance minimale les séparant valant $d/200$. Les angles sont aussi aléatoires de façon à ne privilégier aucune direction. L'ensemble est plongé dans un milieu infini car les effets de bords ne sont pas l'objet de la présente investigation.

Trois cas de chargement sont appliqués à cette géométrie :

- la bi-traction,
- la traction simple schématisée en figure 6. 3,

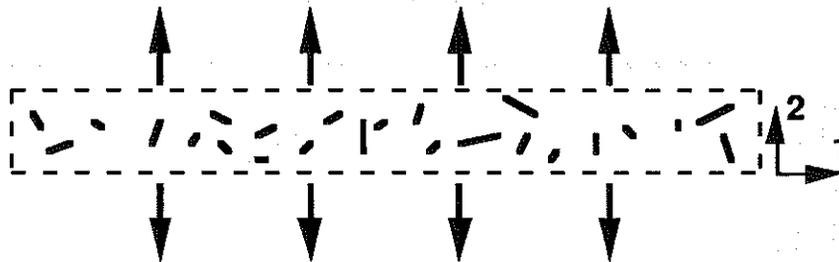


Figure 6. 3 : traction simple sur un modèle géométrique.

- la compression simple à 45 degrés (figure 6. 4). Dans ce cas les valeurs du coefficient de frottement seront 0 et 0,5.

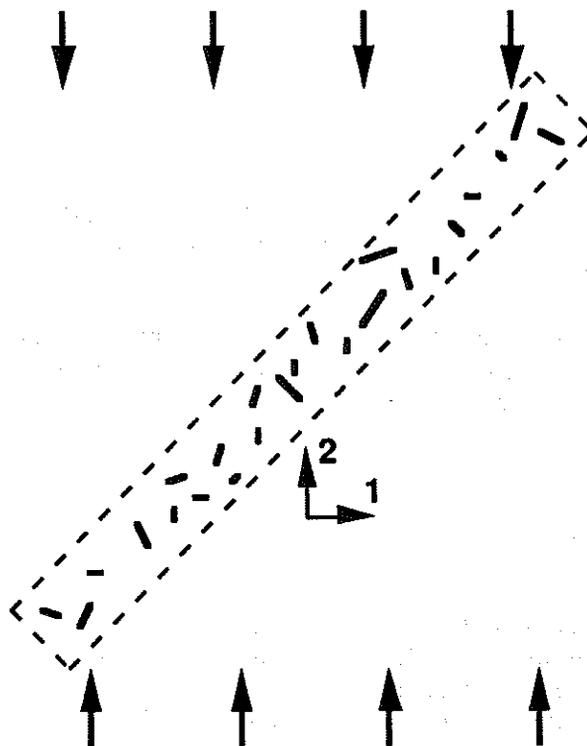


Figure 6. 4 : compression simple à 45 degrés sur une bande.

L'objectif de cette investigation est de rendre compte des effets d'une zone multifissurée (endommagée) sur son voisinage. La zone fissurée se comporte-t-elle comme une pseudo-fissure ? Dans quel voisinage peut-on s'attendre à un développement de la microfissuration ?

Il est certain que les concentrations de contraintes vont apparaître aux points singuliers. Toutefois la ténacité varie localement dans des matériaux tels que le béton et la propagation de chaque fissure est dépendante de la configuration et de la constitution du fond de fissure. Il est donc possible qu'une microfissuration apparaisse en dehors de la zone fissurée. Les auto-contraintes d'élaboration (retrait par exemple) légèrement modifiées par la présence de fissures peuvent conduire à une fissuration locale. Les valeurs dans la zone fissurée seront donc mal représentées par les figures 6. 5. 10 à 6. 5. 26 pour mieux visualiser les phénomènes ailleurs.

6. 5. 2. EFFET D'UNE FISSURE SUR SON VOISINAGE

Interpréter des résultats nécessite de bien connaître les résultats pour des cas simples. Dans ce but les figures 6. 5. 1 à 6. 5. 8 informent sur l'état de sollicitation d'un milieu infini comportant une seule fissure sous divers types de chargement.

Elles informent aussi (figure 6. 5. 3 par exemple) sur la difficulté de tracer des cartes lissées (le tracé est non symétrique alors que les résultats injectés dans le post-processeur le sont). Il s'agit de bien connaître les outils utilisés...

Le maillage de la figure 6. 5. 1 a servi pour toutes les sorties graphiques de ce chapitre. Sa maille étant de dimension bien supérieure à la taille de certaines fissures, les résultats en zone fissurée ne sont pas significatifs.

6. 5. 3. BI-TRACTION

Dans ce cas il n'existe de repère principal et la différence des contraintes principales est non nulle que par effet des interactions. Les interactions en terme d'énergie de déformation ou de contrainte de cisaillement hors zone fissurée sont très faibles (quelques % sur la figure 6. 5. 14). La figure 6. 5. 10 fait nettement apparaître que la géométrie de fissuration dans la zone influe loin sur les formes des courbes d'isovaleurs.

Si la microfissuration se développe sous l'effet des faibles sollicitations hors zone fissurée c'est la géométrie à l'intérieur de la bande et non sa forme qui semble piloter la propagation.

6. 5. 4. TRACTION SIMPLE

Les interactions sont faibles et localisées dans la bande. La sollicitation étant orientée perpendiculairement à l'axe de la bande il apparaît que celle-ci se comporte globalement comme une pseudo-fissure (figure 6. 5. 15) et l'influence de la géométrie de fissuration à une portée équivalente à la géométrie de la bande.

On peut constater sur la figure 6. 5. 17 que pour notre distribution géométrique la bande décharge verticalement et charge horizontalement son voisinage. La microfissuration s'effectuerait préférentiellement dans le prolongement de l'axe de la bande fissurée (figures 6. 5. 15 à 6. 5. 20).

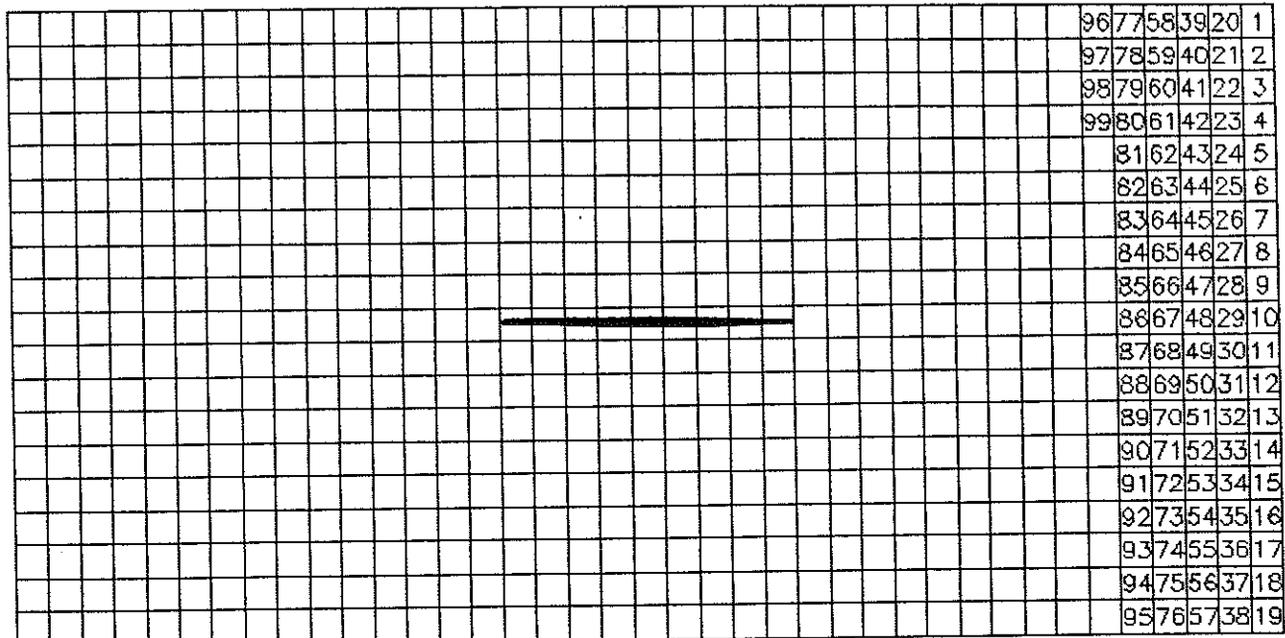
6. 5. 5. COMPRESSION A 45 DEGRES

6. 5. 5. 1. COEFFICIENT DE FROTTEMENT NUL

La figure 6. 5. 21 montre que les déformations principales d'extension tendent à s'orienter verticalement. Les effets de la fissuration sont très locaux ainsi que les interactions (figures 6. 5. 21 et 6. 5. 24). Les fissures ne pouvant plus "fonctionner en mode I" les effets de leur présence sont diminués "de moitié". La contrainte de cisaillement qui s'applique à 45 degrés vaut elle-même 0,5 pour une compression simple unité.

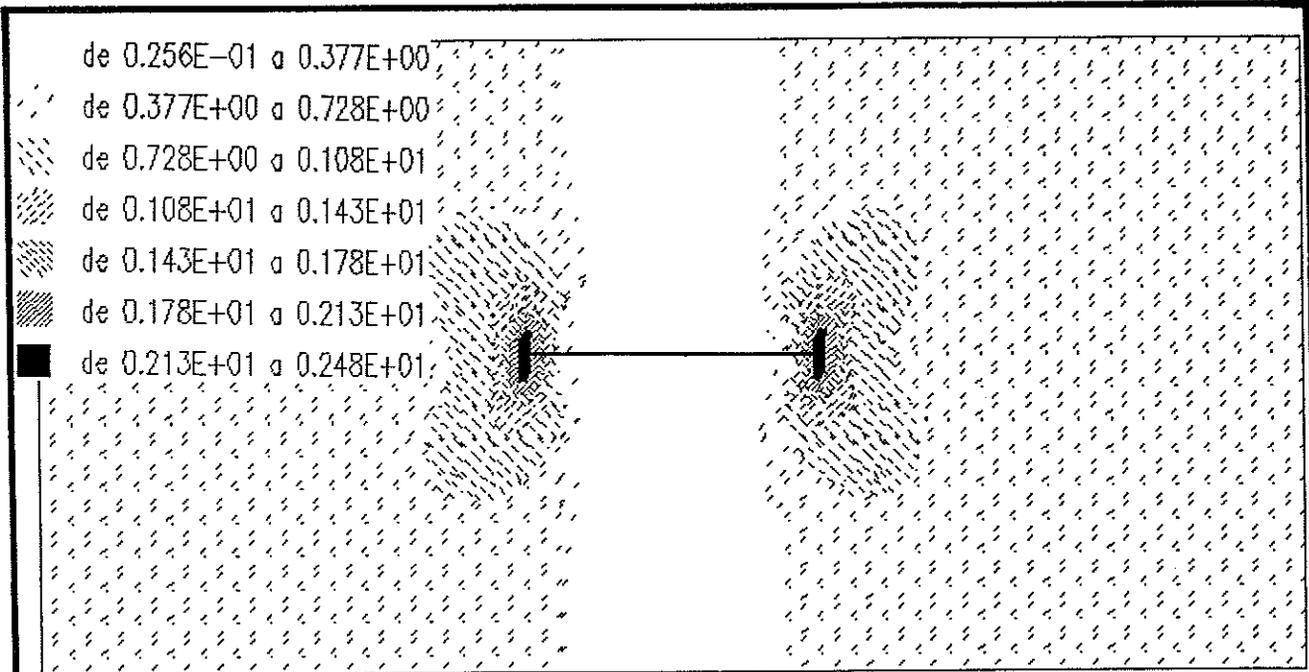
6. 5. 5. 2. COEFFICIENT DE FROTTEMENT VALANT 0,5

Les figures 6. 5. 25 et 6. 5. 26 confortent la tendance du paragraphe précédent à diminuer l'effet des fissures en prenant en compte l'effet unilatéral plus le frottement. Les effets notoires sont localisés dans la bande. Cette conclusion est évidemment liée à l'exemple choisi.



Maillage utilisé pour les sorties graphiques.

Figure 6. 5. 1



**Milieu fissuré tendu ($\sigma=1$) :
isovaleurs de l'énergie de déformation.**

Figure 6. 5. 2

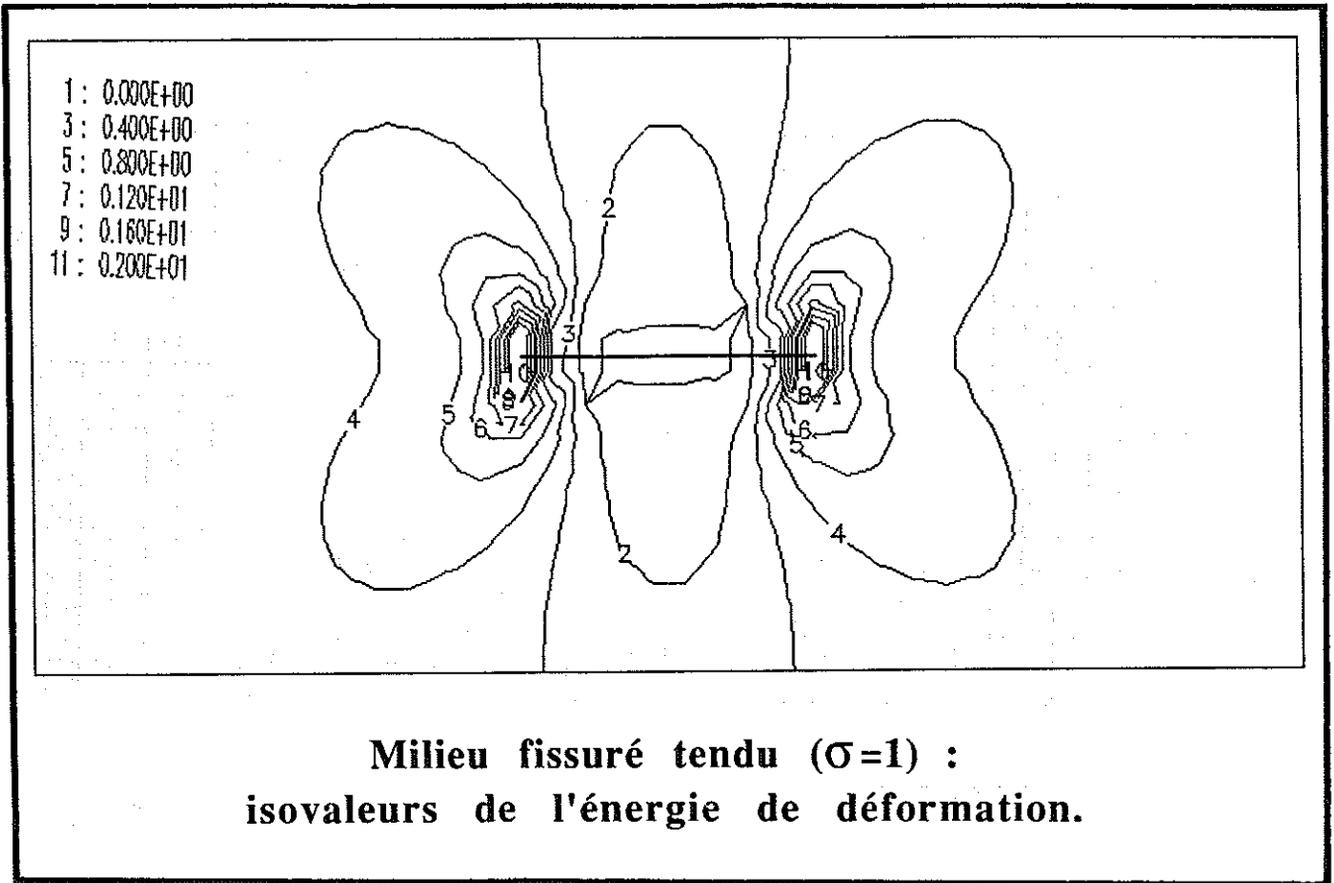


Figure 6. 5. 3

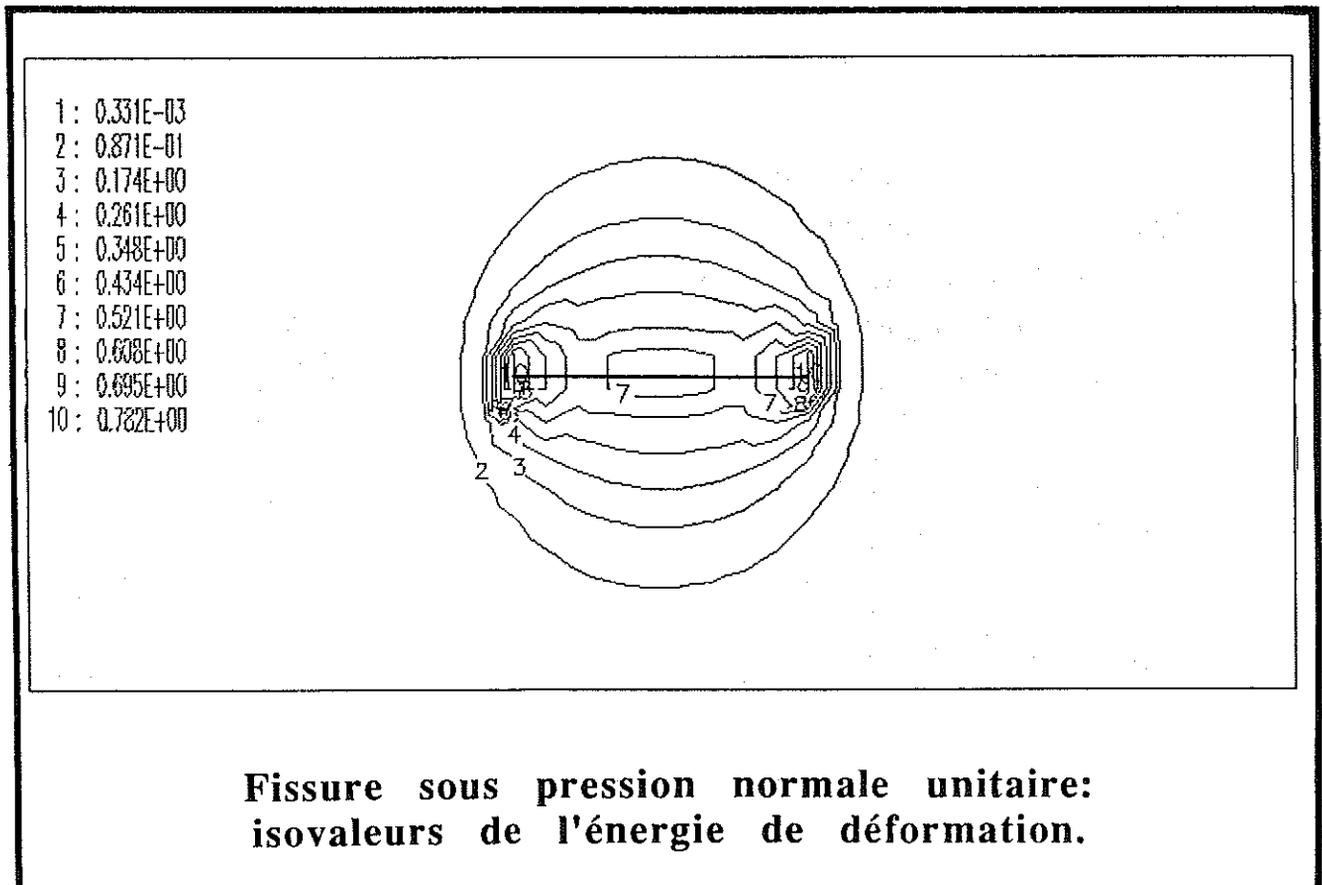
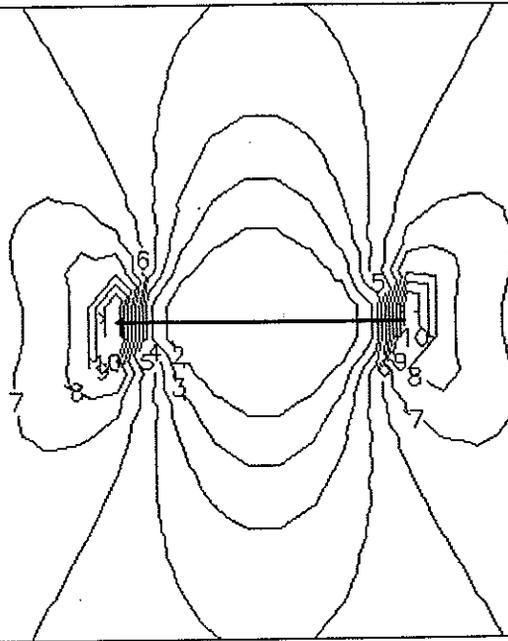


Figure 6. 5. 4

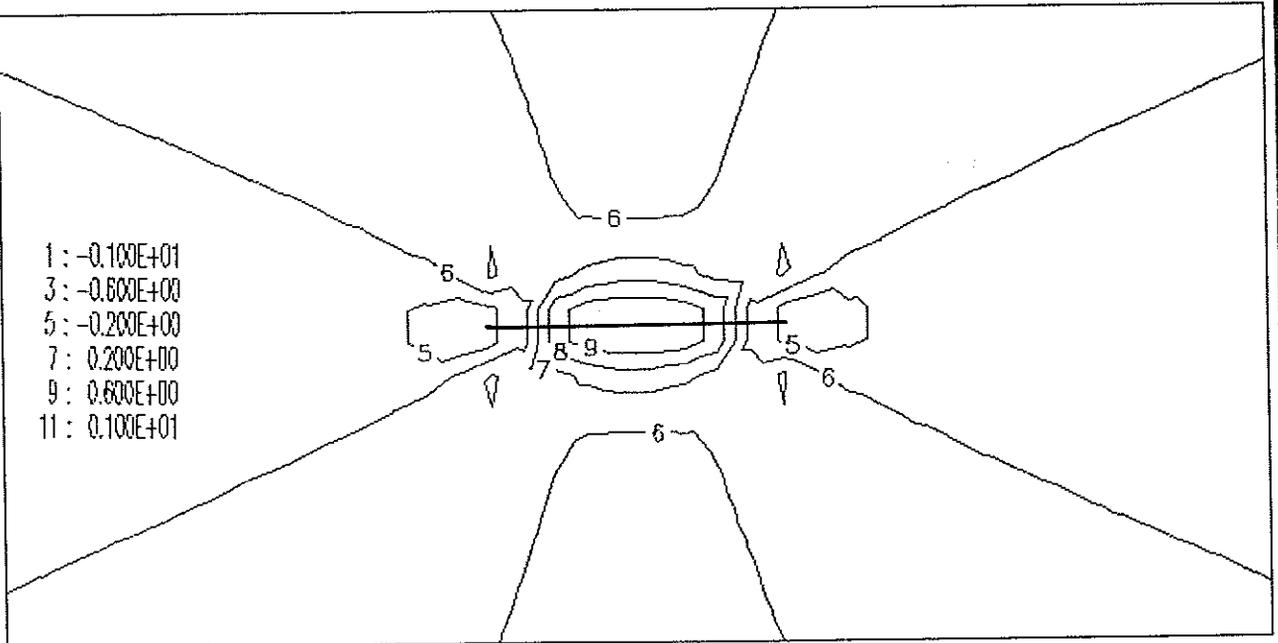
1 : -0.100E+01
3 : -0.600E+00
5 : -0.200E+00
7 : 0.200E+00
9 : 0.600E+00
11 : 0.100E+01



**Fissure sous pression normale unitaire:
isovaleurs de contraintes normales verticales.**

Figure 6. 5. 5

1 : -0.100E+01
3 : -0.600E+00
5 : -0.200E+00
7 : 0.200E+00
9 : 0.600E+00
11 : 0.100E+01



**Fissure sous pression tangentielle unitaire:
isovaleurs de contraintes tangentielles.**

Figure 6. 5. 6

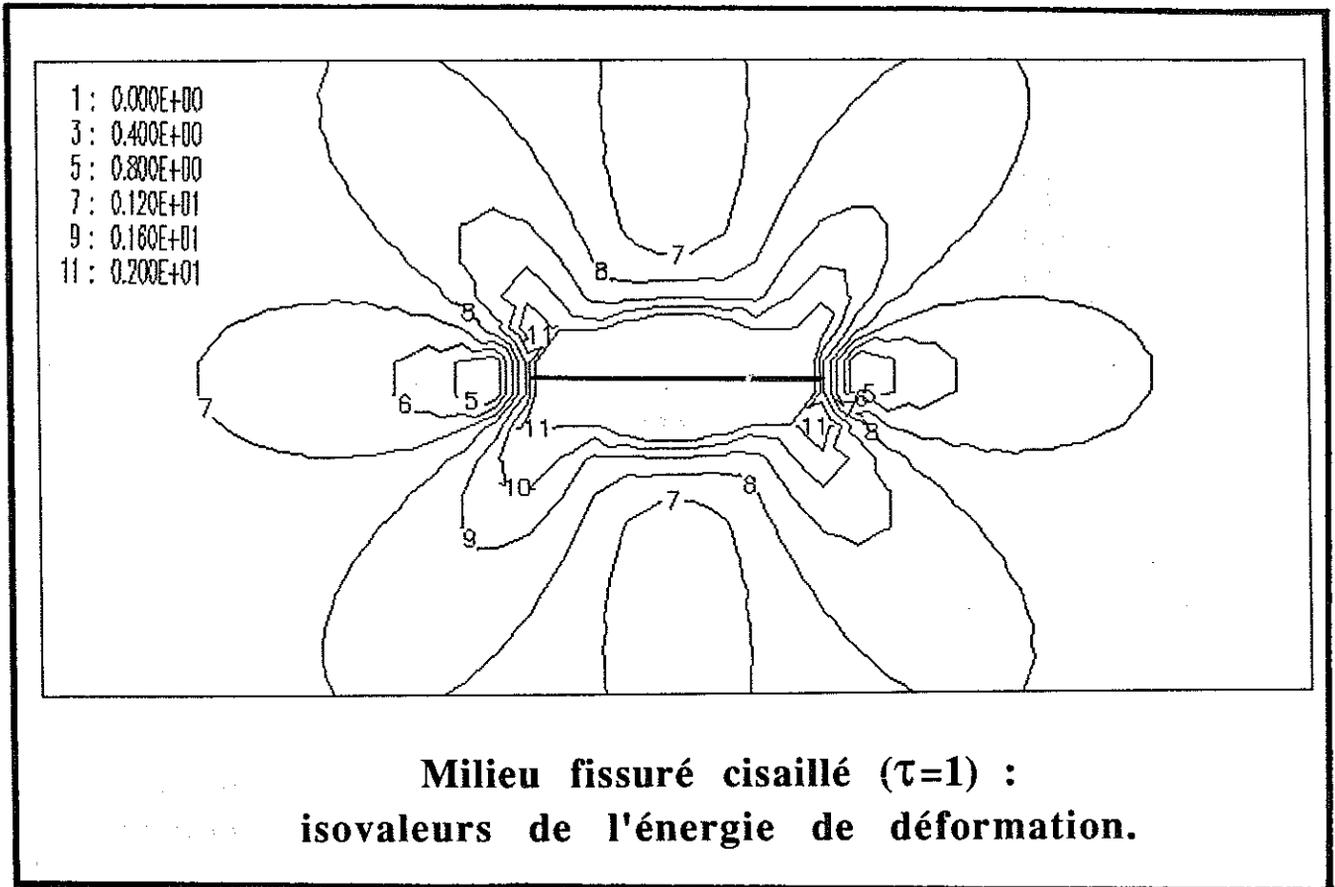


Figure 6. 5. 7

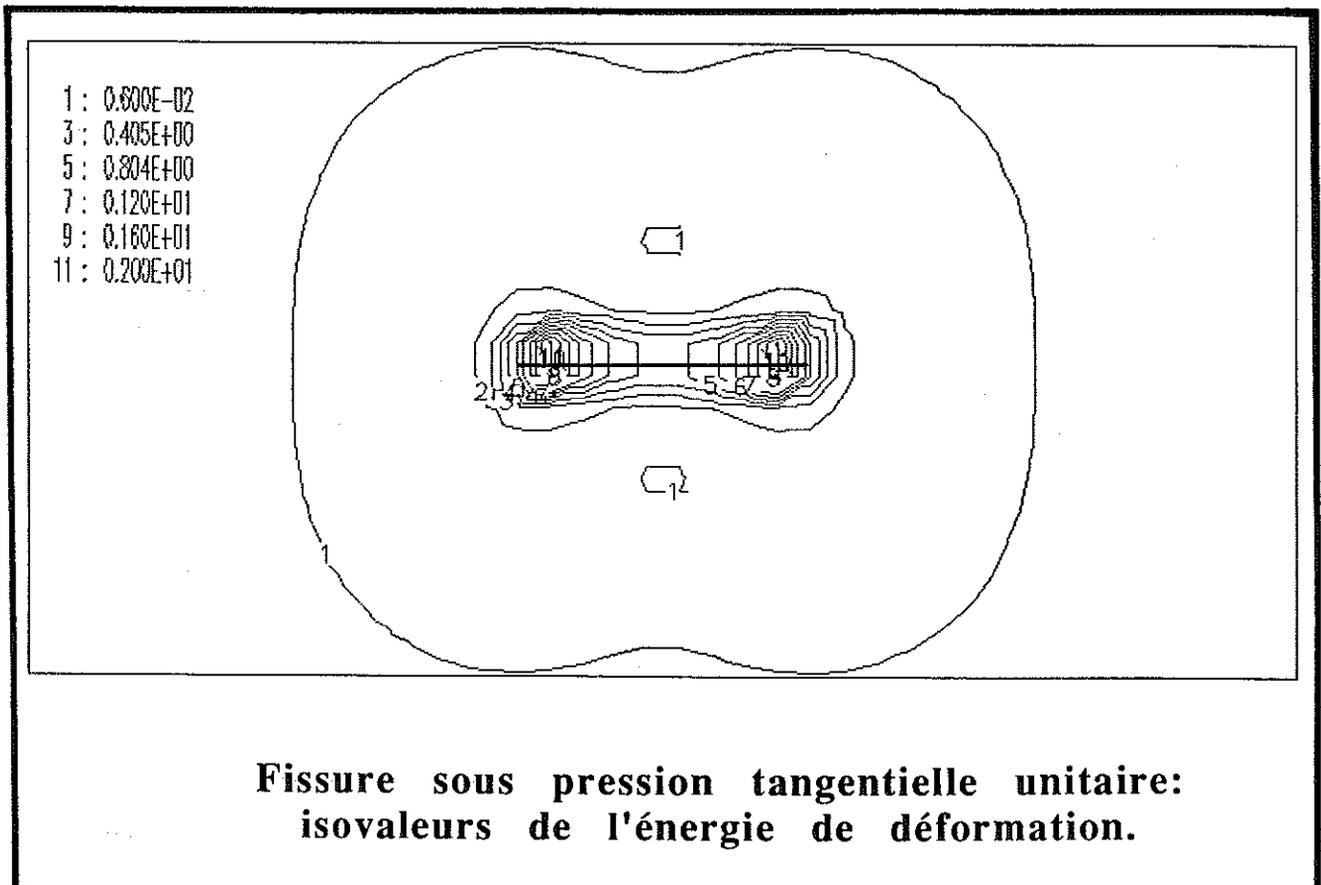


Figure 6. 5. 8

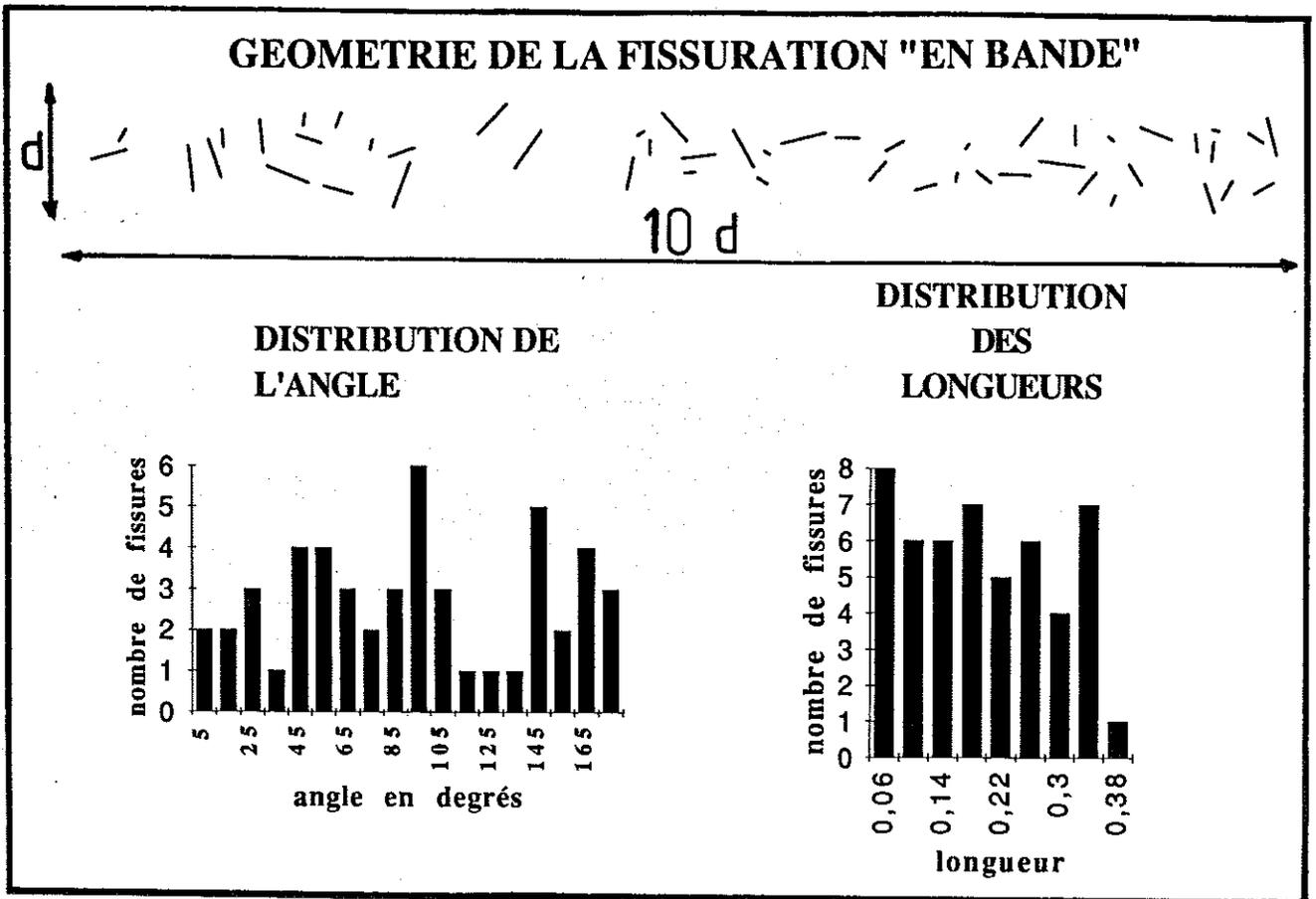


Figure 6. 5. 9

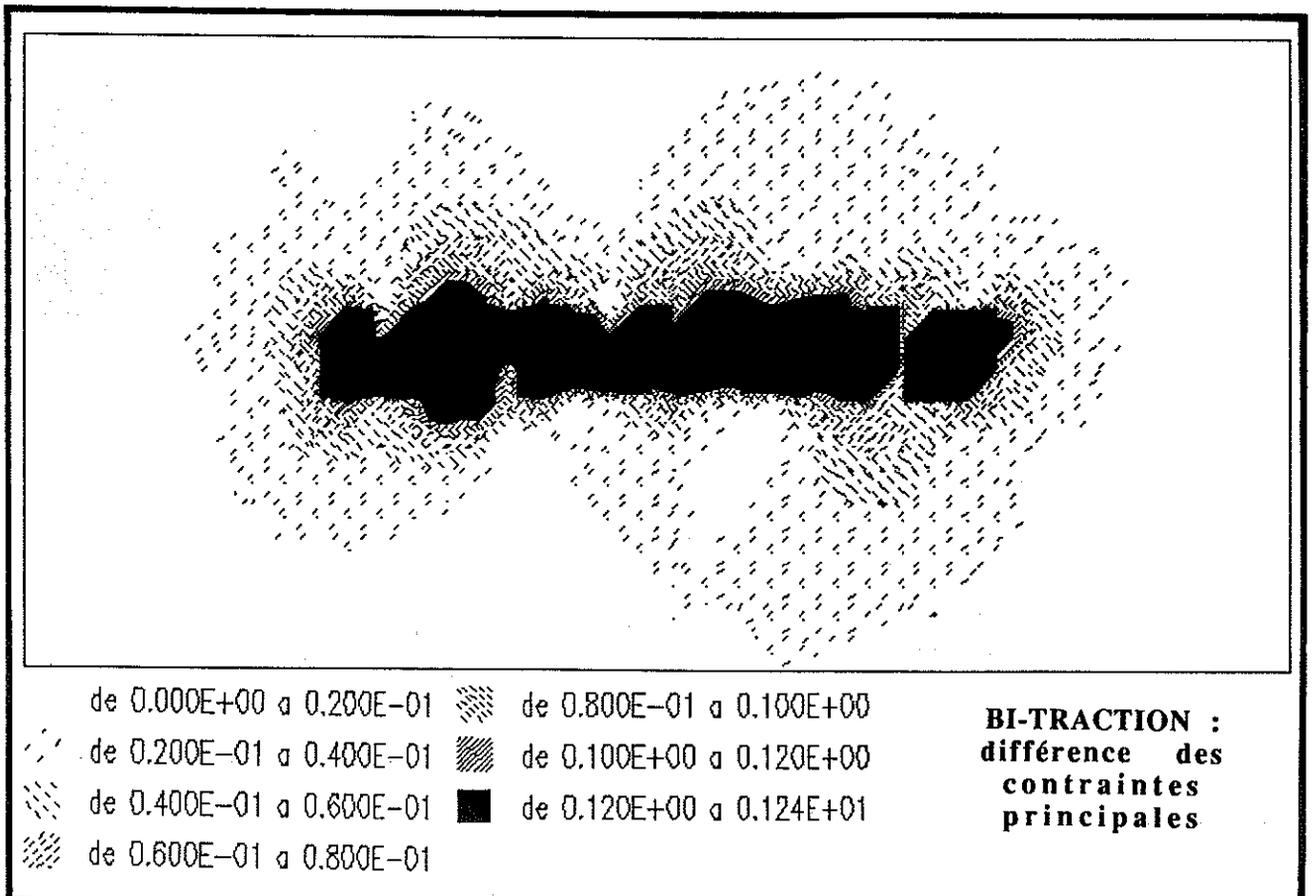


Figure 6. 5. 10

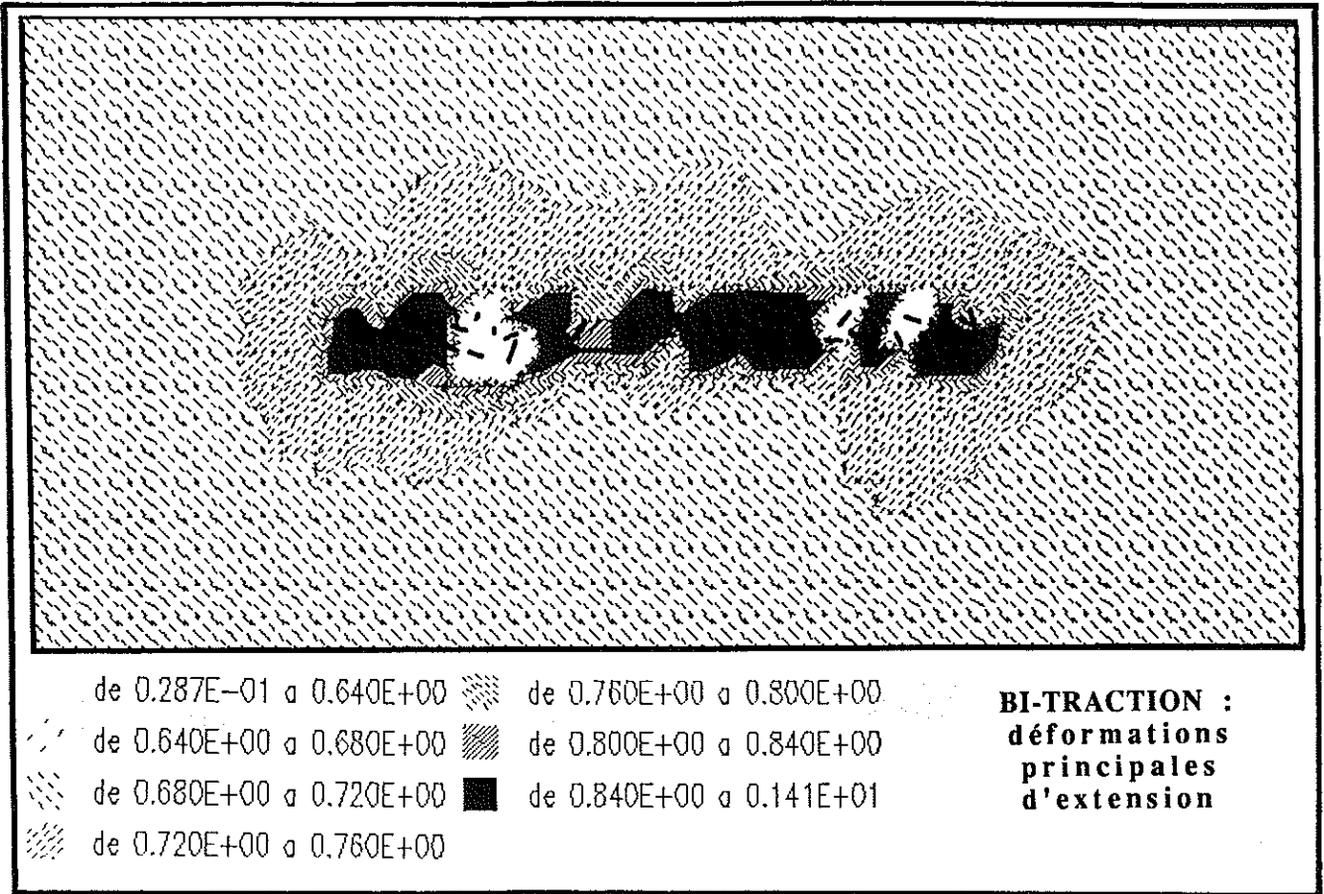


Figure 6. 5. 11

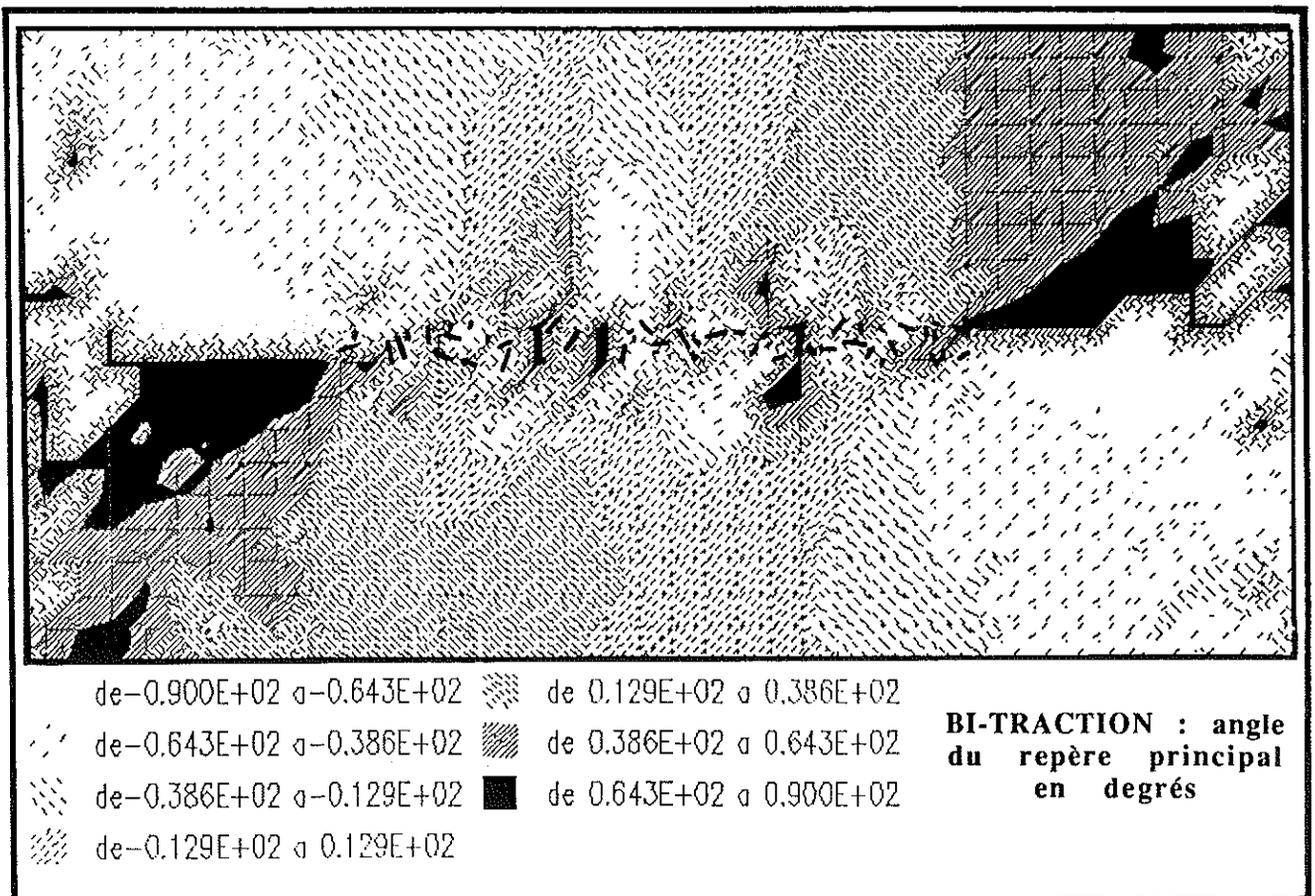


Figure 6. 5. 12

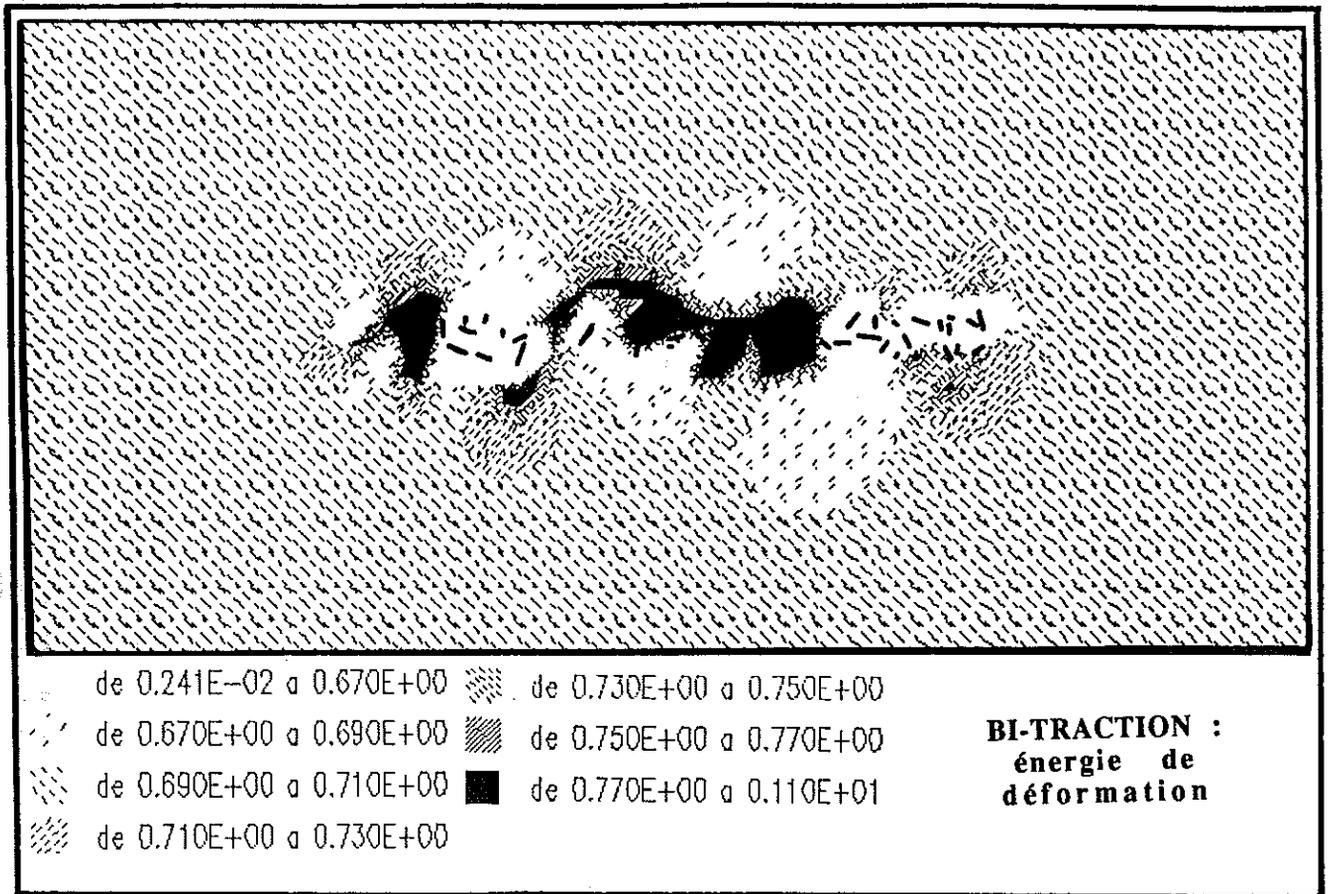


Figure 6. 5. 13

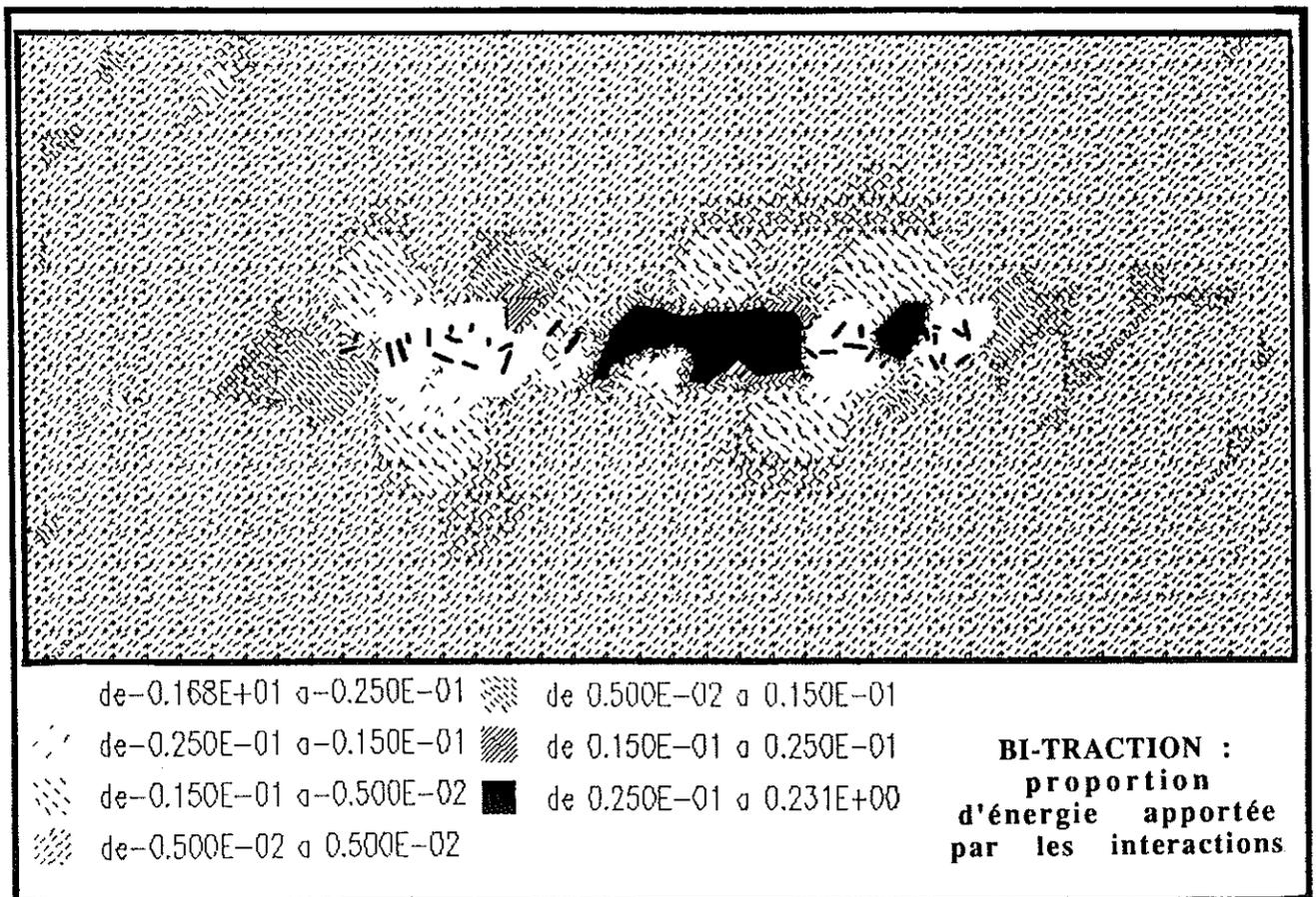


Figure 6. 5. 14

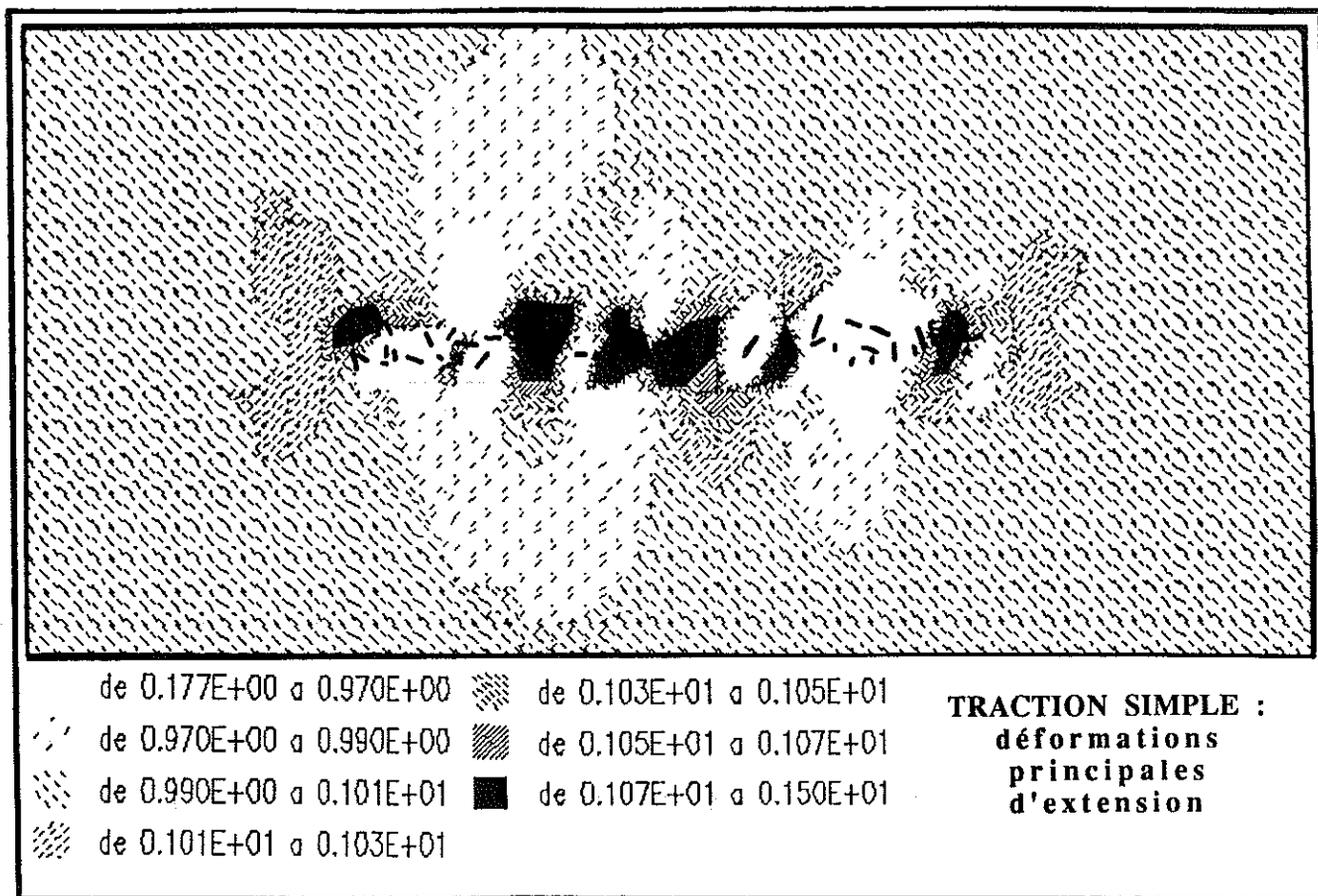


Figure 6. 5. 15

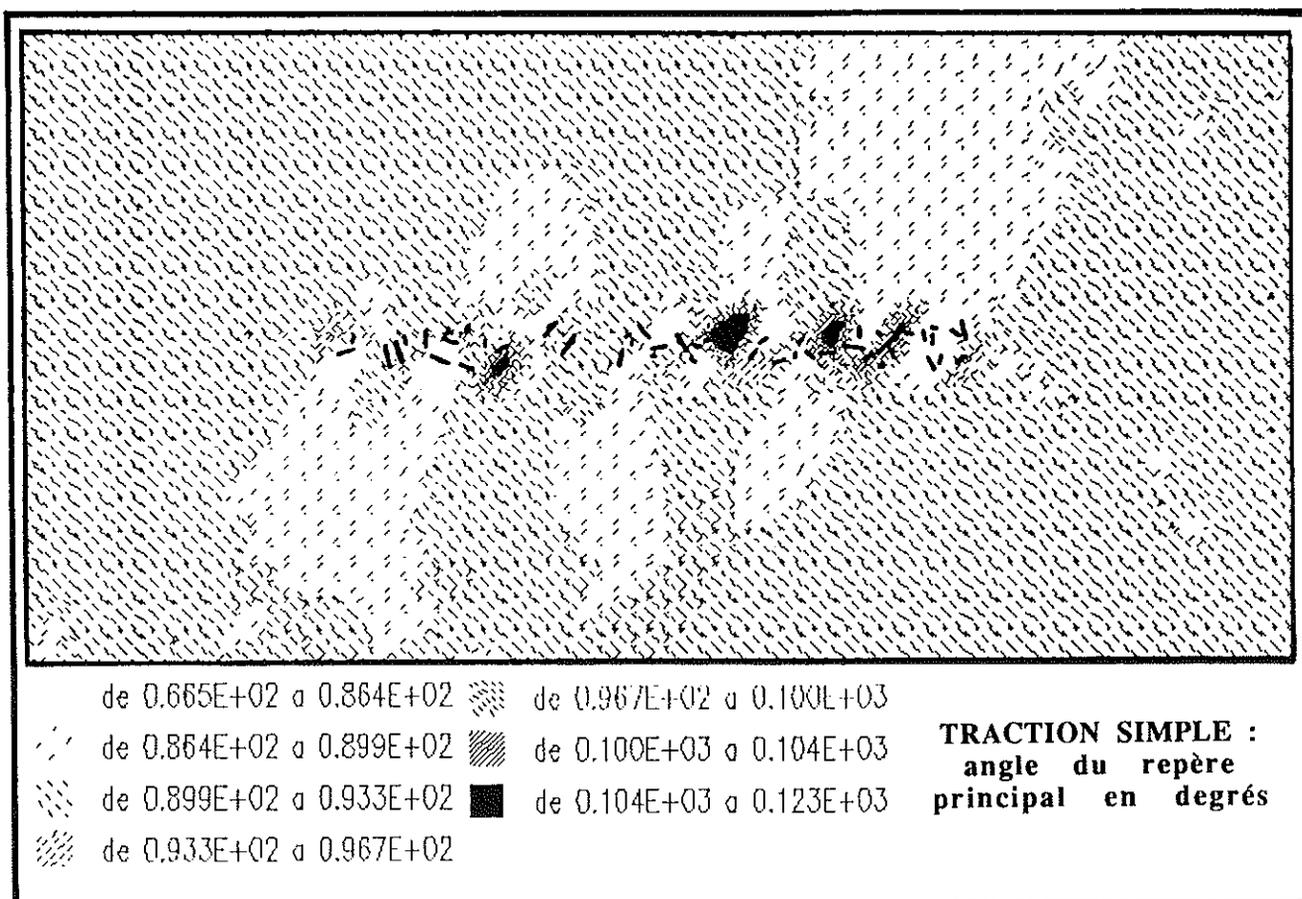


Figure 6. 5. 16

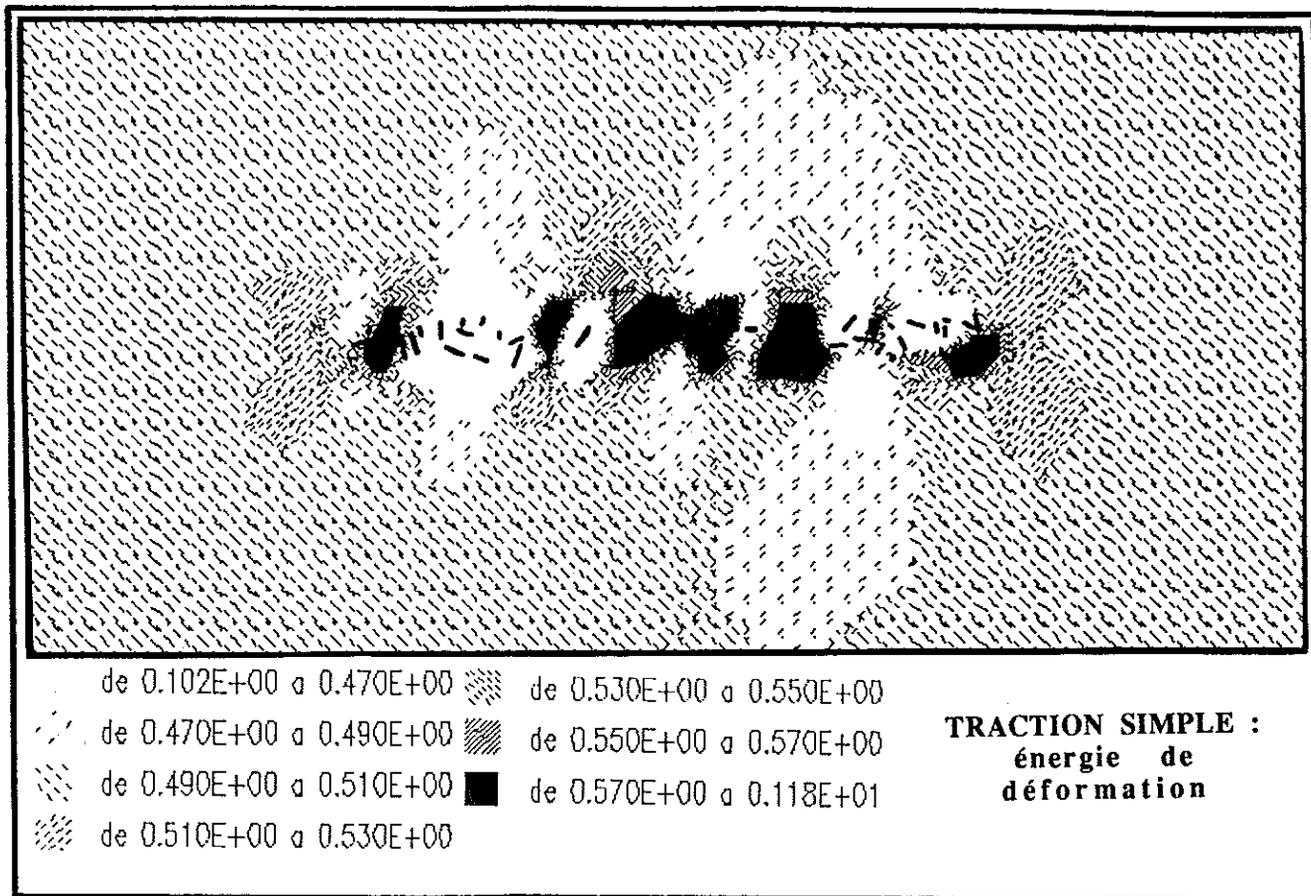


Figure 6. 5. 17

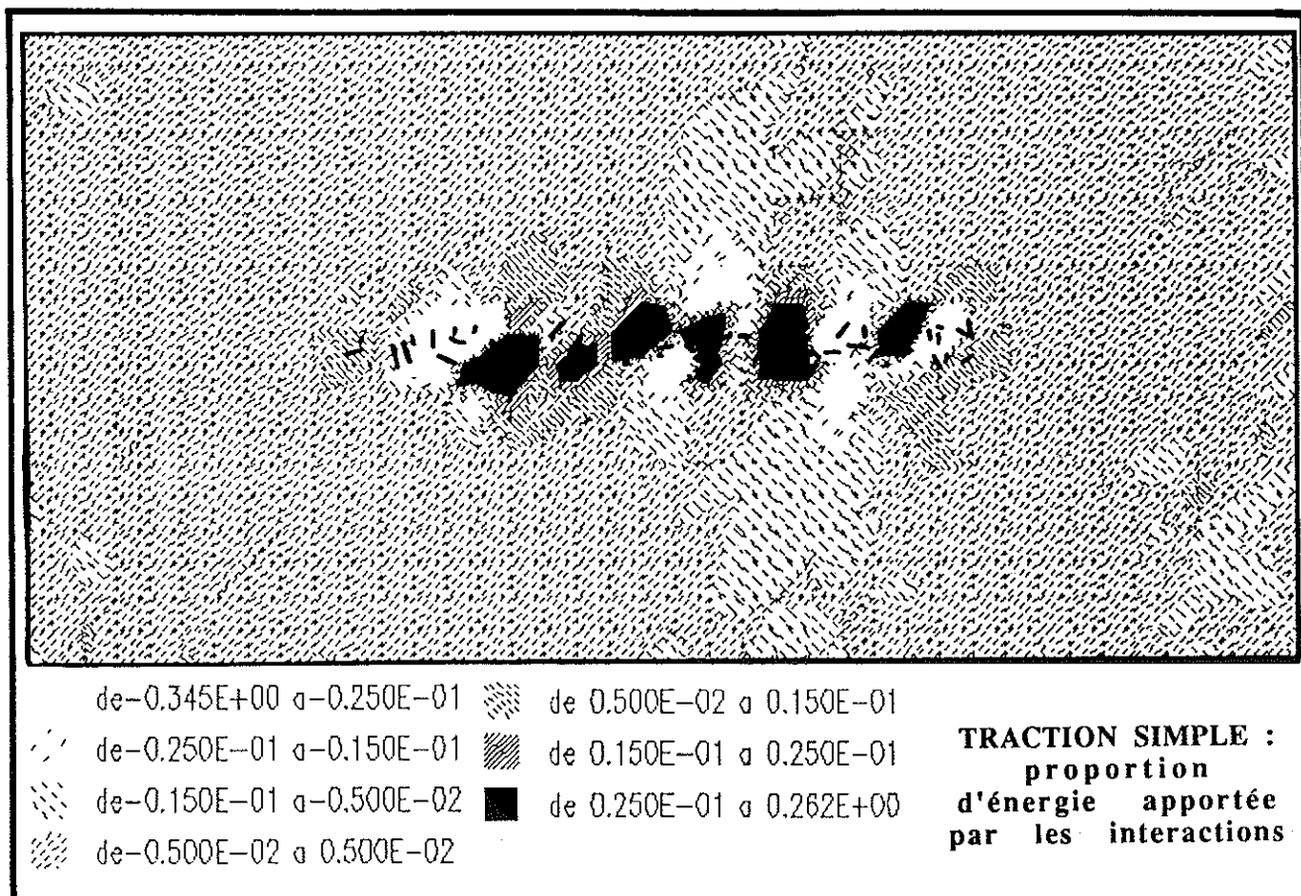


Figure 6. 5. 18

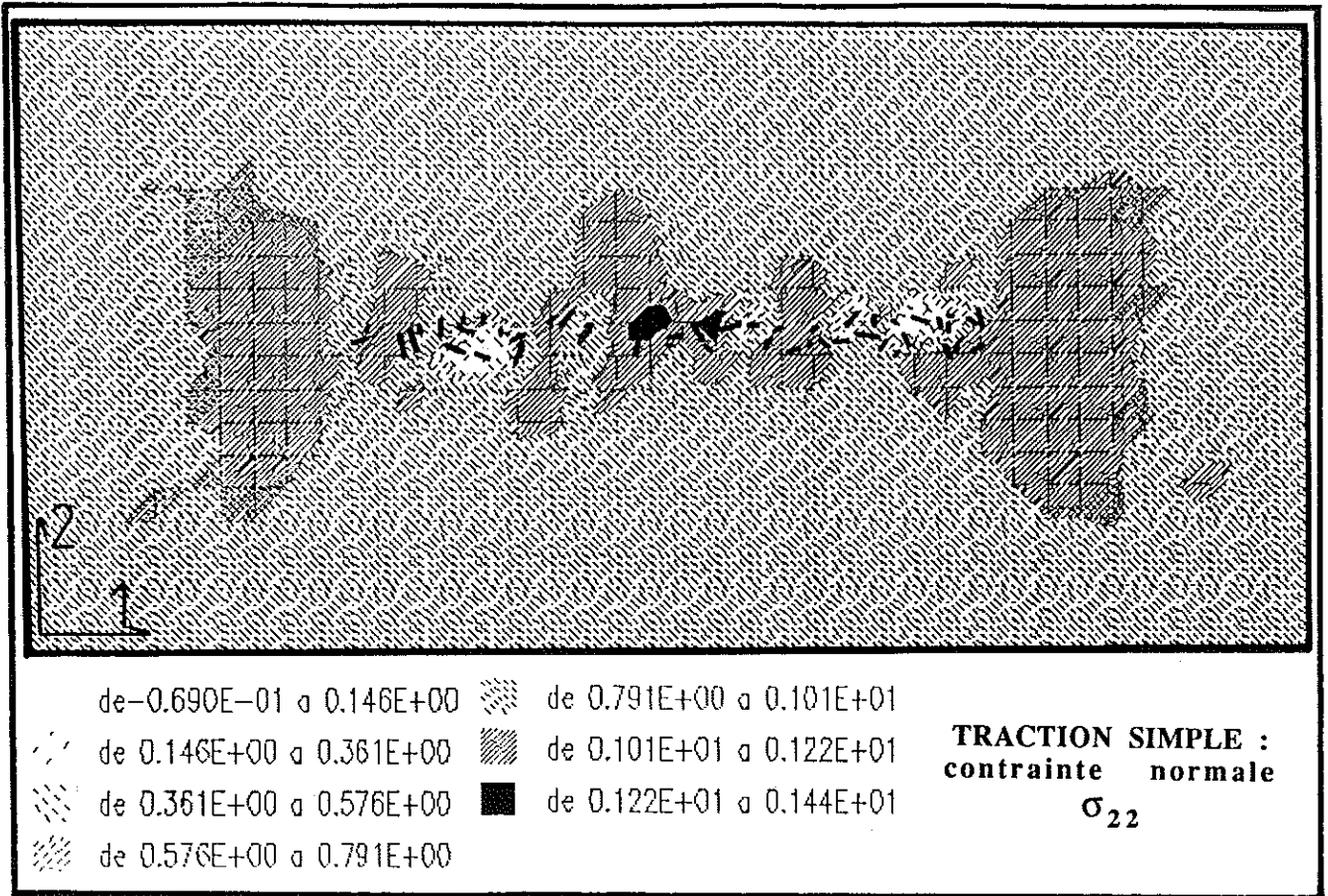


Figure 6. 5. 19

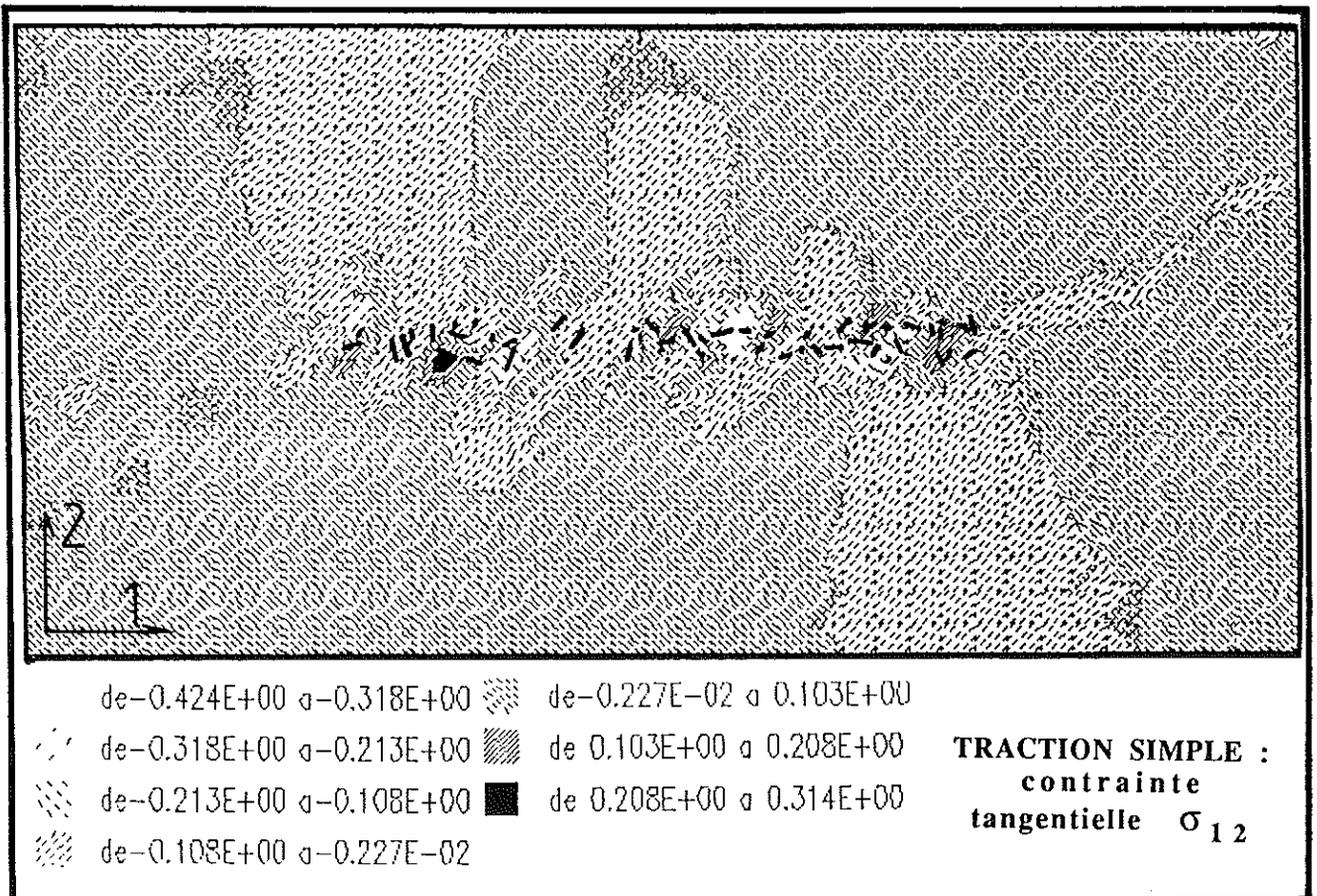


Figure 6. 5. 20

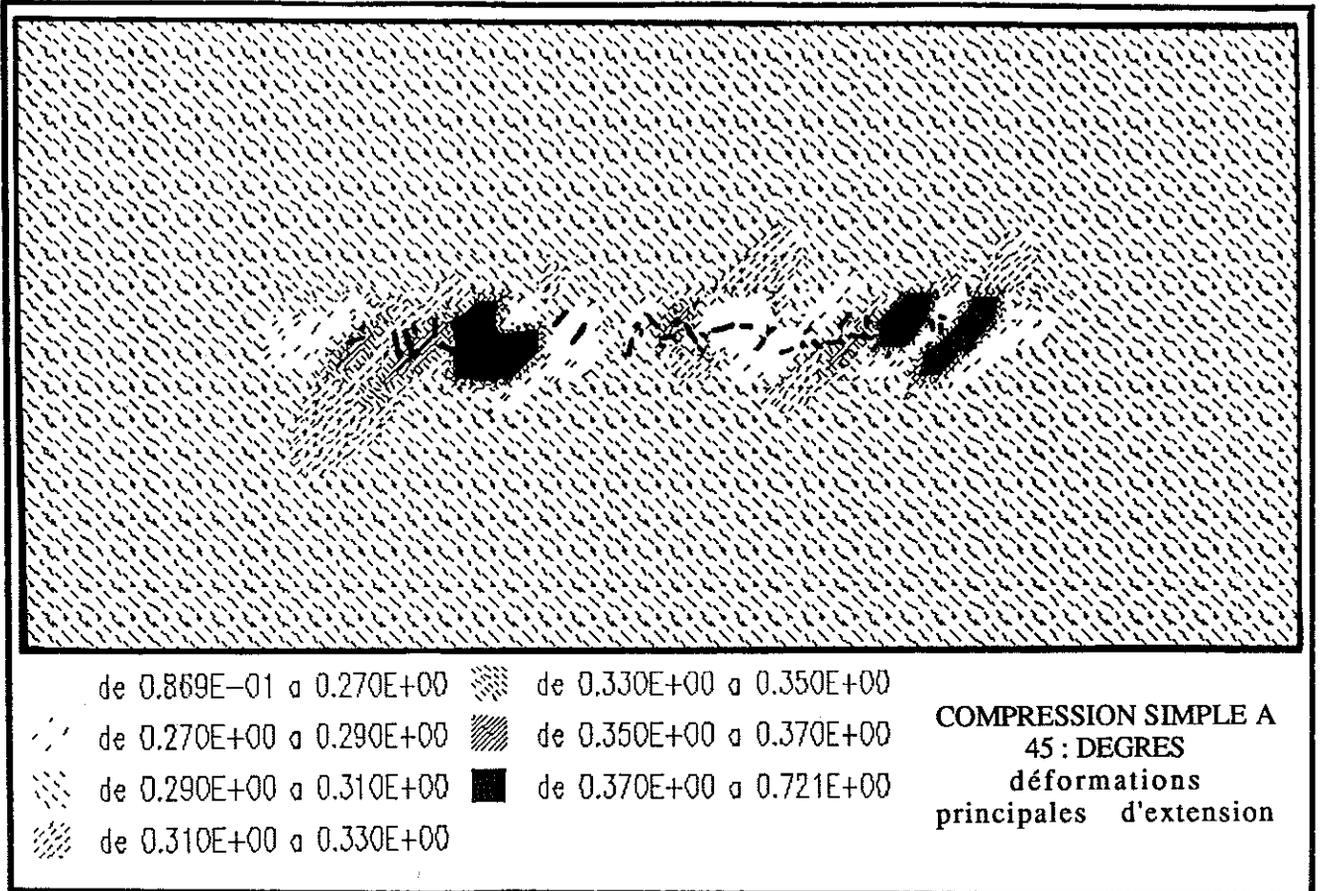


Figure 6. 5. 21

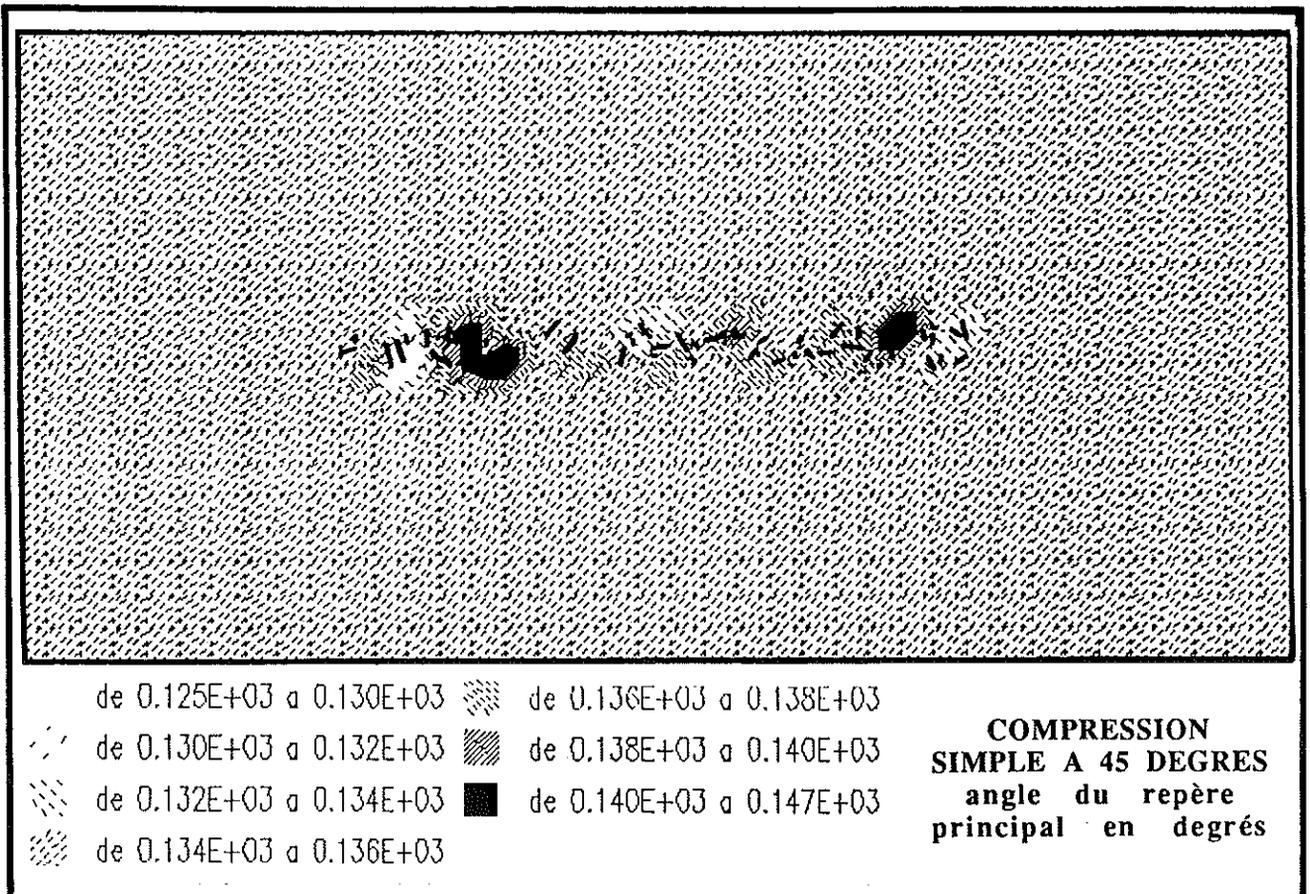


Figure 6. 5. 22

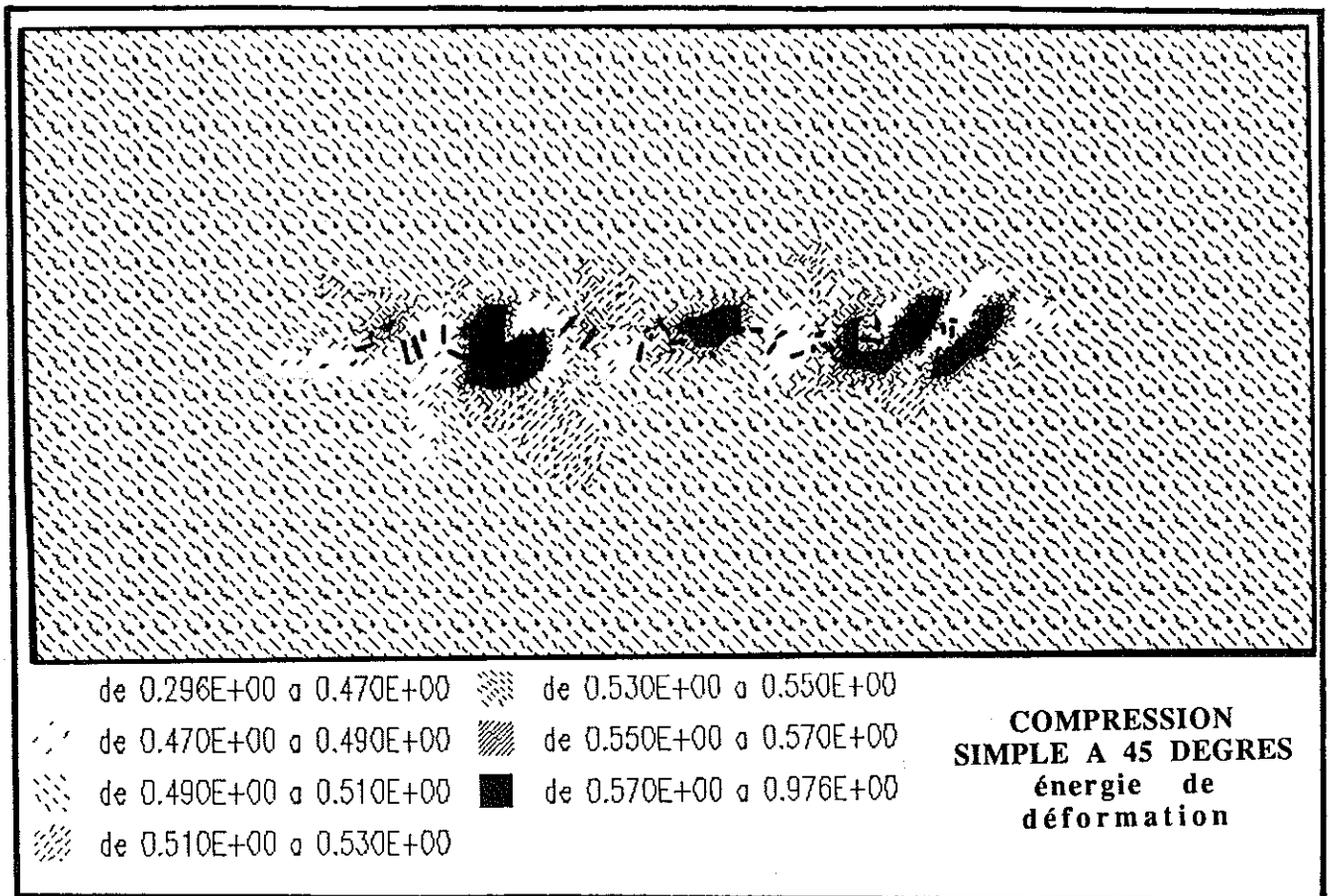


Figure 6. 5. 23

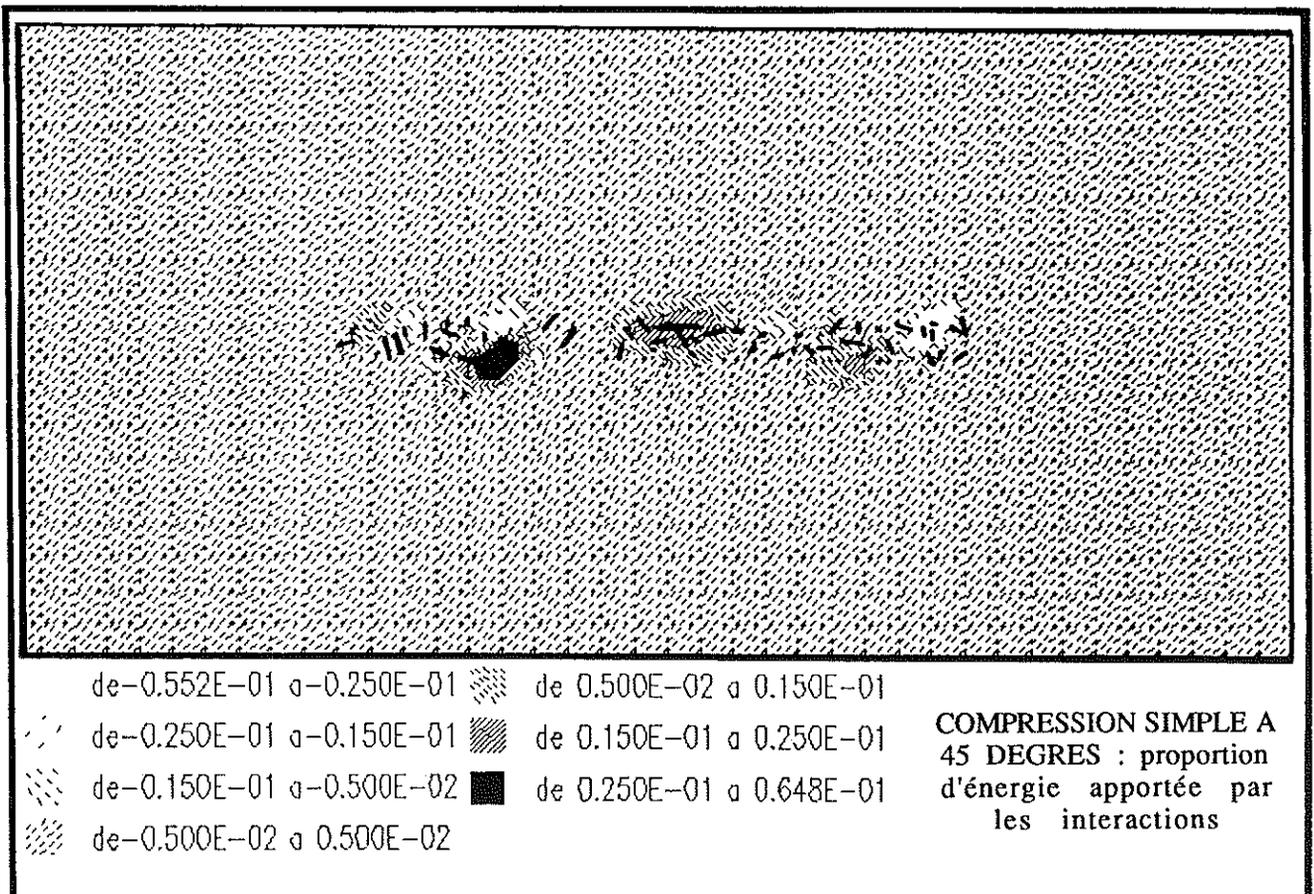


Figure 6. 5. 24

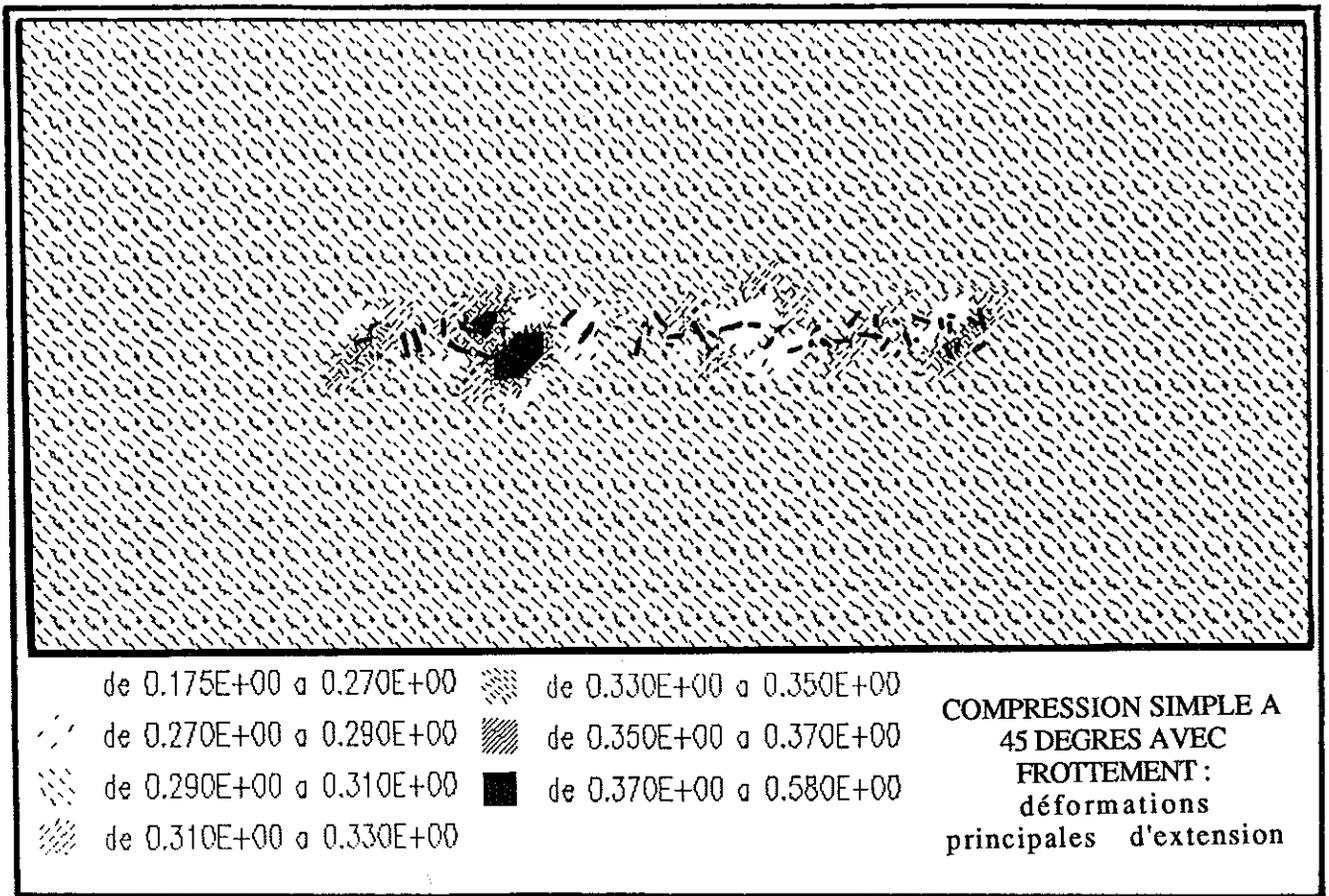


Figure 6. 5. 25

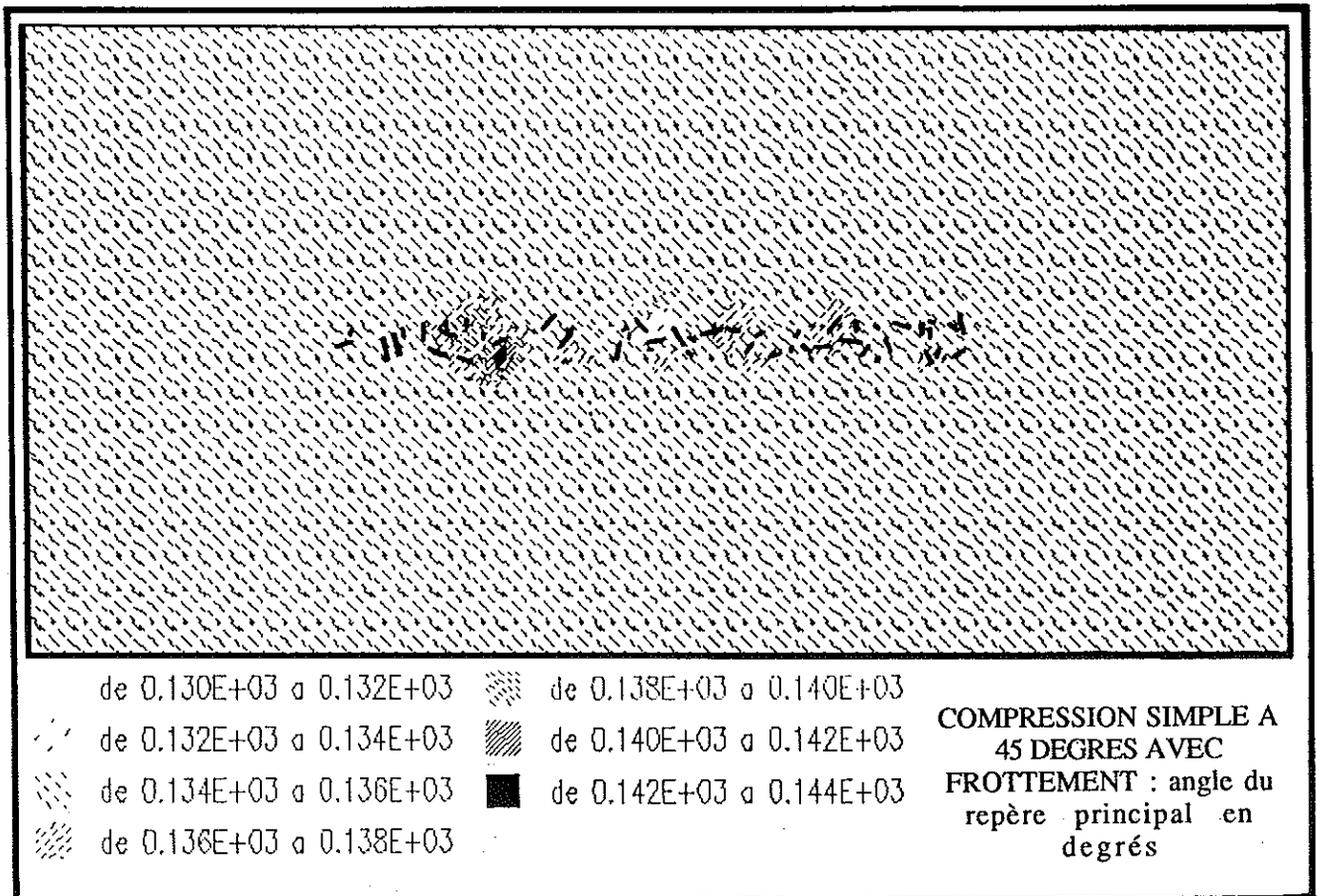


Figure 6. 5. 26

6. 6. SOUPLESSE DE MILIEUX MULTIFISSURES

La souplesse d'une plaque carrée fissurée a été évaluée sur un exemple en tenant compte ou non des interactions entre fissures et bords. Cette souplesse dans les deux directions du plan de la plaque est traduite en terme de composantes du tenseur S_{ijkl} . Ce tenseur illustre le comportement en terme de moyenne et ses valeurs homogénéisées sont calculées à l'aide des valeurs moyennes des déplacements des frontières (6. 6. 1) et (6. 6. 2) Les contraintes sont imposées uniformes sur les frontières et le coefficient de frottement vaut zéro.

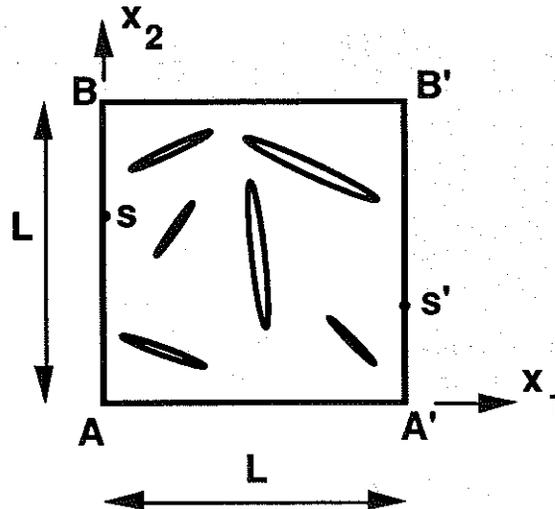


Figure 6. 5 : plaque carrée fissurée.

La valeur moyenne des déplacements le long de l'axe x_1 est :

$$\langle u_1 \rangle^{AB} = \frac{1}{L} \left\{ \int_A^B u_1(s) ds - \int_{A'}^{B'} u_1(s') ds' \right\} \quad (6. 6. 1)$$

Pour une contrainte normale d'axe x_1 (les autres termes du tenseur des contraintes étant nuls) en élasticité linéaire isotrope, on a :

$$u_1^{AB 0} = L S_{1111}^0 \sigma_{11} \quad \text{où} \quad S_{1111}^0 = \frac{1}{E}$$

$$u_2^{BB' 0} = L S_{2211}^0 \sigma_{11} \quad \text{où} \quad S_{2211}^0 = \frac{-\nu}{E}$$

les valeurs homogénéisées sont obtenues par :

$$\frac{S_{1111}}{S_{1111}^0} = \frac{\langle u_1 \rangle^{AB}}{u_1^{AB 0}} \quad (6. 6. 2)$$

Différentes valeurs S_{ijkl} sont ainsi évaluées en résolvant le problème élastique (interactions prises en compte) puis en considérant que les fissures n'interagissent ni entre elles ni avec les frontières du domaine. Le signe + correspond aux contraintes de traction et le signe - aux compressions.

En traction :

Résultats avec interactions :

Résultats sans interaction :

$$\frac{S_{1111}^+}{S_{1111}^0} = E S_{1111}^+ = 1,33$$

$$E S_{1111}^+ = 1,64$$

$$E S_{2222}^+ = 1,34$$

$$E S_{2222}^+ = 1,70$$

$$-E S_{2211}^+ = 0,12$$

$$-E S_{2211}^+ = 0,05$$

$$-E S_{1122}^+ = 0,13$$

$$-E S_{1122}^+ = 0,05$$

En compression :

$$E S_{1111}^- = 1,08$$

$$E S_{1111}^- = 1,16$$

$$E S_{2222}^- = 1,08$$

$$E S_{2222}^- = 1,16$$

$$-E S_{2211}^- = 0,28$$

$$-E S_{2211}^- = 0,36$$

$$-E S_{1122}^- = 0,28$$

$$-E S_{1122}^- = 0,36$$

En cisaillement :

Résultats avec interactions :

Résultats sans interaction :

$$\frac{S_{1212}^+}{S_{1212}^0} = 1,41$$

$$\frac{S_{1212}^+}{S_{1212}^0} = 1,62$$

$$\frac{S_{1212}^-}{S_{1212}^0} = 1,44$$

$$\frac{S_{1212}^-}{S_{1212}^0} = 1,66$$

L'influence d'une contrainte normale sur la distorsion est évaluée de la même façon :

Résultats avec interactions :

Résultats sans interaction :

$$E S_{1211}^+ = 0,03$$

$$S_{1211}^+ = 0,04$$

$$E S_{1222}^+ = 0,01$$

$$E S_{1222}^+ = 0,04$$

$$E S_{1211}^- = -0,02$$

$$E S_{1211}^- = -0,02$$

$$E S_{1222}^- = +0,01$$

$$E S_{1222}^- = +0,02$$

On peut de même évaluer l'influence du cisaillement sur les déformations longitudinales :

Résultats avec interactions :

$$E S_{1112}^+ = 0,16$$

$$E S_{2212}^+ = 0,10$$

$$E S_{1112}^- = -0,13$$

$$E S_{2212}^- = -0,06$$

Résultats sans interaction :

$$S_{1112}^+ = 0,31$$

$$E S_{2212}^+ = 0,20$$

$$E S_{1112}^- = -0,25$$

$$E S_{2212}^- = -0,12$$

Remarque :

Lorsqu'on applique le principe de réciprocité à une structure fissurée on doit obtenir $S_{2211} = S_{1122}$ tant que l'unilatéralité n'intervient pas. Une perte de symétrie du tenseur d'élasticité homogénéisé pourra être observée dès que des fissures seront fermées pour σ_{11} et ouvertes pour σ_{22} ou inversement. En effet, la réciprocité concerne dans ce cas deux structures différentes.

Pour $\sigma_{11} = 0$ $\sigma_{12} = 0$ $\sigma_{22} = 1$ la fissure est fermée.

Pour $\sigma_{11} = 1$ $\sigma_{12} = 0$ $\sigma_{22} = 0$ la fissure est ouverte.

Par exemple (figure 6. 6) une contrainte de traction est appliquée dans la direction 2 ne ferme pas la fissure alors qu'une contrainte de traction est appliquée dans la direction 1 la ferme. Dans notre cas, seules les interactions responsables des refermetures de fissures pourront provoquer $S_{2211} \neq S_{1122}$.

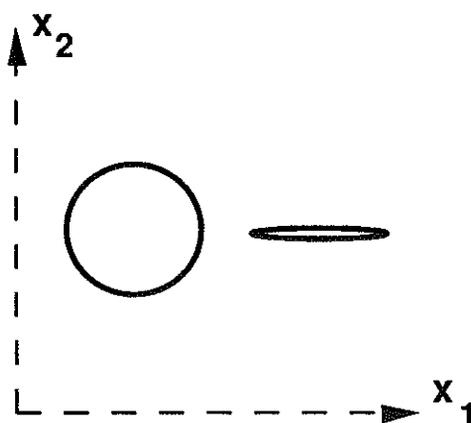


Figure 6. 6 : une fissure interagit avec un pore circulaire.

La prise en compte des interactions est importante sur les paramètres S_{iiii} car elles diminuent de moitié l'effet de la présence des fissures. Les valeurs S_{ijkk} sont négligeables. Les refermetures de fissures sont visibles lorsqu'on compare les

résultats en traction et compression. Les valeurs S_{ijkk} sont négligeables pour l'exemple choisi. Ceci justifie les choix effectués dans certaines formulations [MAZARS 84], [RAMTANI 92].

6. 7. DISSIPATION POUR DES CHARGEMENTS CYCLIQUES

Les figures 6. 7. 2, 6. 7. 3 et 6. 7. 4 illustrent des chargements cycliques pour différentes géométries. La dissipation engendrée par le frottement dans les fissures est faible tant que la densité de fissure est petite. Les fissures sont de taille constante donc la dissipation d'énergie liée à la propagation n'apparaît pas sur les courbes. On constate qu'il y a stabilisation dès la fin du premier cycle.

MODELE GEOMETRIQUE POUR

UN MILIEU FISSURE

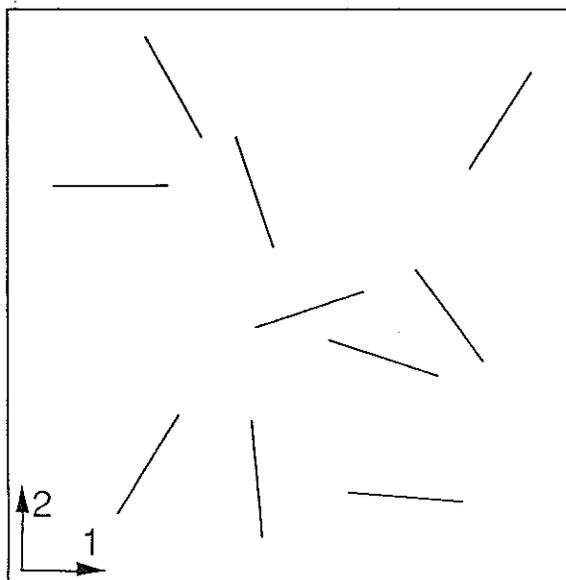


Figure 6.7.1.

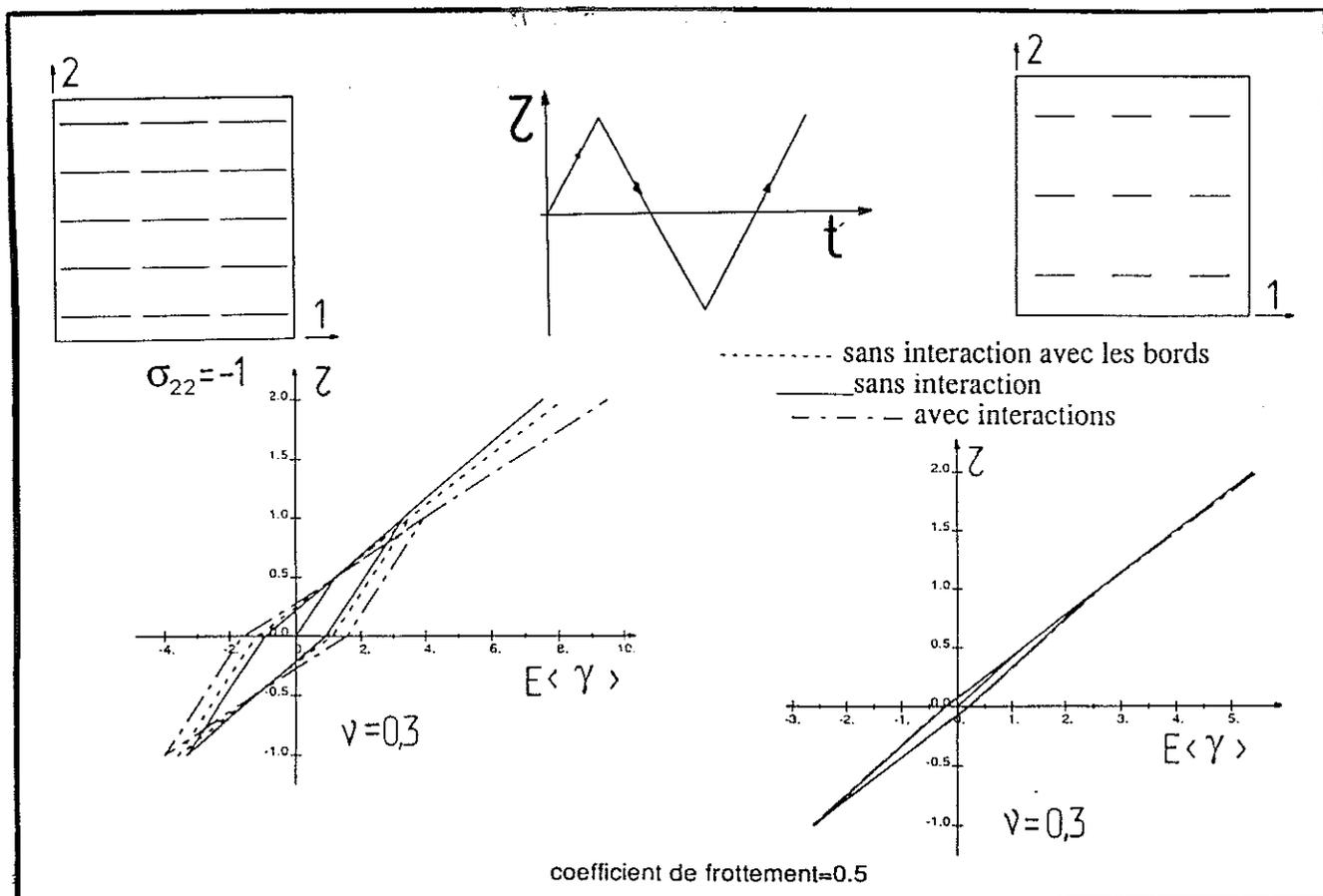


Figure 6. 7. 2

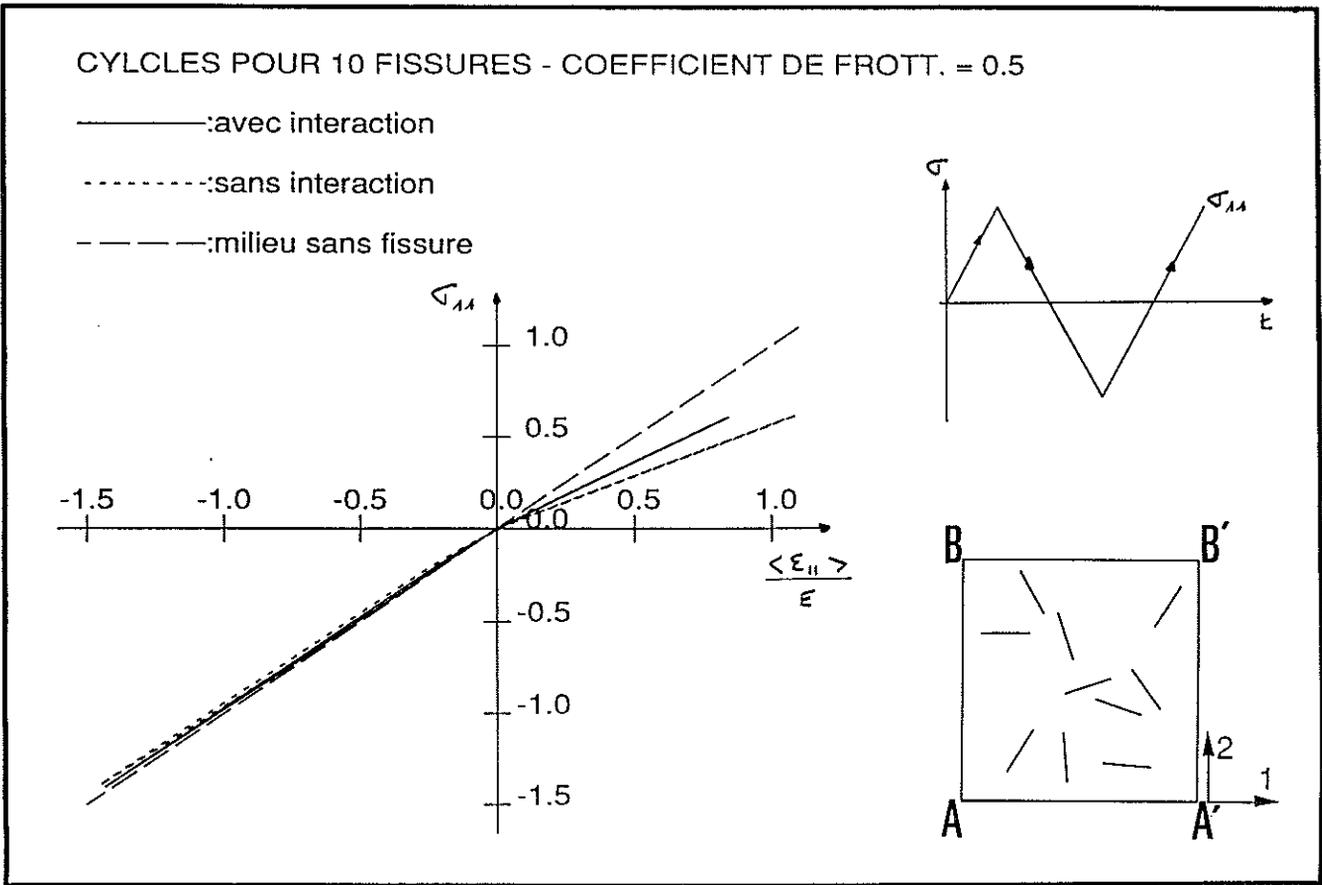


Figure 6. 7. 3

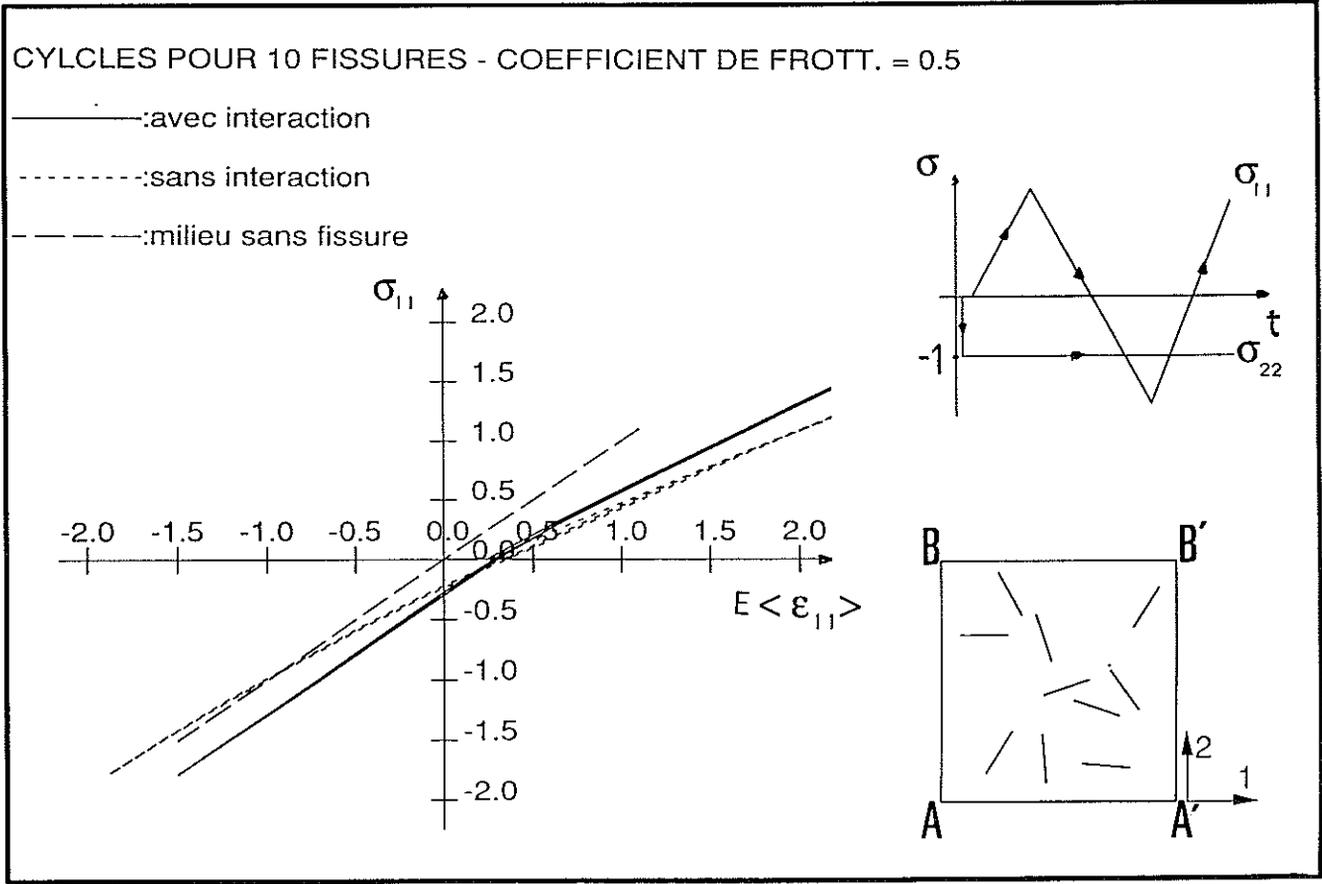


Figure 6. 7. 4

**MESURES A L'ECHELLE
MESOSCOPIQUE**

7. MESURES A L'ECHELLE MESOSCOPIQUE

7. 1. CHOIX D'UNE TECHNIQUE

Les développements présentés ici doivent être complétés par des mesures à l'échelle mésoscopique (plus petite échelle à laquelle la matière puisse être considérée homogène et continue). L'échelle microscopique devient de ce fait celle du cristal ou de la particule élémentaire et régit les phénomènes existant en fond de fissure. Cet aspect de la fissuration quoique dictant le comportement au niveau de la singularité ne sera pas abordé ici.

Les techniques de mesure capables d'apporter des informations sur les évolutions de la matière (endommagement...) dans la masse sont peu nombreuses et évidemment indirectes. On pourra citer la tomodensitométrie [DESRUES 91], les techniques ultrasonores [BERTHAUD 88] et acoustiques [BRUHAT 90] [BERTHAUD 92], la photoélasticimétrie sur matériaux à propriétés optiques particulières. Dans notre cas les mesures de champs en surface concordent avec la modélisation numérique adoptée dès qu'elles reflètent un état plan de sollicitation (pièces minces). On pourra citer la photoélasticimétrie (verniss photoélastique sur matériaux industriels), les techniques de Moiré, holographiques, interférométriques, la stéréophotogramétrie [BENAIJA 89] ...

Afin d'effectuer les aller et retours indispensables entre la modélisation et les expérimentations, la technique choisie devra à la fois fournir des renseignements sur le comportement des interfaces (loi de frottement, propagation ...) à injecter dans les calculs et permettre de valider les calculs. La méthode retenue pour sa précision, sa souplesse [CADORET 79] [DESSAILLY 78], son automatisation possible et son relatif faible coût est la technique de granularité laser plus connue sous le nom de speckle laser. Dans le cadre du G.Re.Co. Géomatériaux nous avons automatisé cette technique [FOND 89]

7. 2. LA TECHNIQUE DE GRANULARITE LASER OU "SPECKLE LASER"

7. 2. 1. PRINCIPE GENERAL

Cette technique qui a pour objet l'analyse de champs de déplacements incrémentaux de pièces soumises à des sollicitations mécaniques se décompose en deux phases :

1- enregistrement de clichés sur négatif holographique (au moins 1000 traits/mm). La surface non polie est éclairée par une lumière monochromatique dont la source est fixe.

2- dépouillement des clichés point par point pour obtenir le champ de déplacement par analyse des franges d'interférences provoquées par l'existence du déplacement local de la pièce.

Les champs de déplacements sont "observés" par l'appareil de prise de vue, ils sont donc du type de ceux des formulations eulériennes. Toutefois, compte tenu de l'ordre de grandeur des déplacements mesurés on pourra se permettre de les injecter dans des calculs avec formulation lagrangienne.

La longueur d'onde utilisée fixe la limite inférieure théorique de la résolution. Pour un laser He-Ne elle vaut $0,6238 \mu\text{m}$. La limite supérieure vaut environ le cinquième du diamètre du faisceau laser ($140 \mu\text{m}$ pour notre matériel).

7.2.2. OBTENTION DES CLICHES - REGLAGES OPTIQUES

Les caractéristiques de l'objectif fixent la résolution finale mais aussi la tolérance sur les déplacements hors plan pendant l'essai. L'objectif restitue en fait l'image d'une "tranche" d'un champ d'interférences spatial (figure 7. 2). Ce champ d'interférences spatial est lui-même formé par l'objectif. Ses caractéristiques sont dépendantes de la distance focale f de l'objectif, de l'ouverture de son diaphragme O , du rapport de grandissement choisi G et de la longueur d'onde de la lumière utilisée λ . On peut appliquer les règles de la diffraction à l'infini (diffraction de Fraunhofer) [FRANCON 78] [GOODMANN 75] donc :

$$L_1 = f \left(1 + \frac{1}{G}\right) \text{ et } L_2 = f (1 + G)$$

$$\alpha = \frac{O}{L_2} \text{ et } \beta = \frac{O}{L_1} \quad (7.2.1)$$

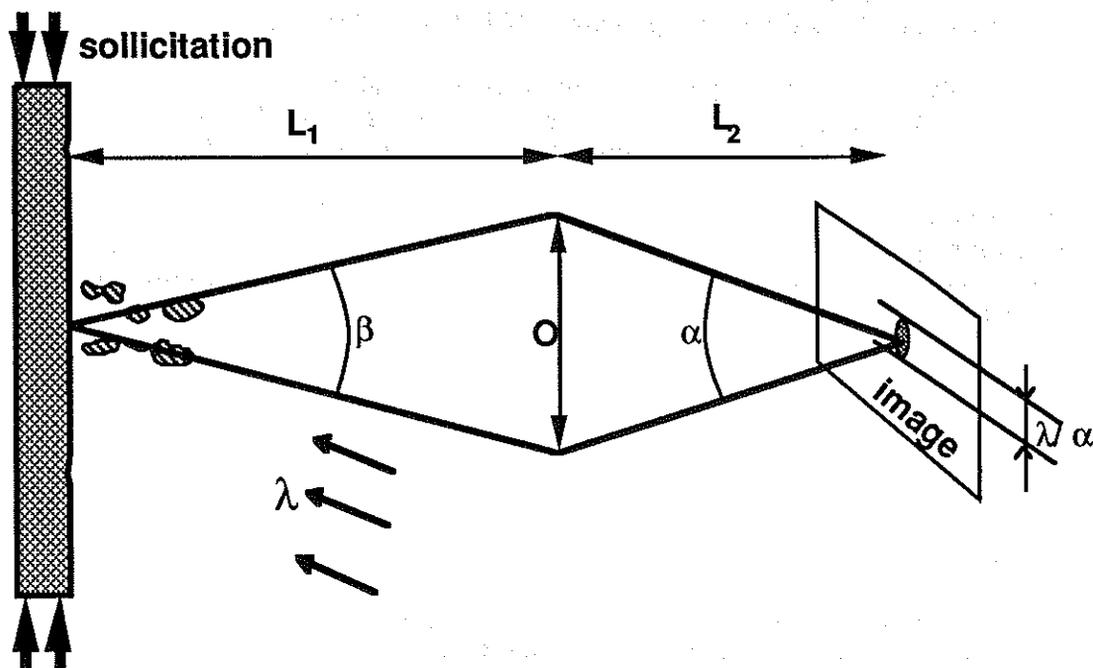


Figure 7. 1 : effets des réglages optiques.

Il est donc possible d'obtenir une résolution de l'ordre du micron en utilisant 2 objectifs de distance focale 50mm et d'ouverture numérique 1,4 montés "tête bêche". Mais dans ce cas le déplacement hors plan ne doit pas excéder $10 \mu\text{m}$ afin d'obtenir deux clichés successifs corrélés.

Afin de travailler dans des conditions moins restrictives nous avons adopté un objectif de distance focale 105mm et d'ouverture numérique 2,8 et choisi un rapport de grandissement de 0,5. Pour notre appareil Nikon F801 de type 24*36mm le champ réel observé est ainsi de $48*72\text{mm}$. Le film Kodak SO253 restitue 1800 traits/mm. La puissance du laser He-Ne de 10mW fixe la durée d'exposition à 0,5 seconde. Bien que ce film holographique soit plus sensible aux lumières rouges

qu'aux autres couleurs du spectre, le travail à la lumière du jour nécessite l'utilisation d'un filtre interférentiel $0,628\mu\text{m}$.

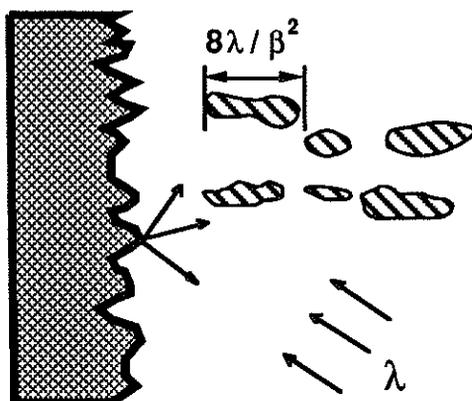


Figure 7. 2 : tolérance sur les déplacements hors plan.

Pour l'essai présenté ici la distance film-pièce valait :

$$L_1 + L_2 \approx 105 (1 + 0,5) + 105 (1 + 2) = 157,5 + 315 = 472,5\text{mm}$$

$$O = \frac{105}{2,8} = 37,5\text{mm} \quad \text{donc} \quad \alpha = \frac{37,5}{157,5} = 0,238 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{37,5}{315} = 0,119$$

La tolérance sur le déplacement hors plan est dans ce cas : $\frac{8 \lambda}{\beta^2} \approx 350 \mu\text{m}$.

La résolution sur le négatif est compte tenu de la taille de la tache d'Airy : $\frac{\lambda}{\alpha} \approx 2,7 \mu\text{m}$ ce qui correspond à un déplacement réel de $5,4 \mu\text{m}$.

Le plus grand déplacement réel incrémental mesurable est environ $280 \mu\text{m}$.

7. 2. 3. DEPOUILLEMENT AUTOMATIQUE DES FRANGES D'INTERFERENCES

Le dépouillement des franges d'interférences permet d'obtenir la valeur du déplacement local (faisceau laser fin de $0,7\text{mm}$ de \varnothing) contenu dans le négatif mais pas son sens (figure 7. 3 et 7. 7). Cette direction est la perpendiculaire à l'axe des franges d'interférences. La valeur du déplacement est inversement proportionnelle à la distance entre les franges et les règles de la diffraction (optique de Fourier) donnent :

$$u = \frac{\lambda L_{\text{neg. écran}}}{D_{\text{franges}}} \quad (7. 2. 2)$$

où $L_{\text{neg. écran}}$ est la distance qui sépare le plan du négatif de celui où l'on visualise les franges d'interférences, D_{franges} est la distance entre les franges et u est le déplacement cherché. Le sens du déplacement ne peut être connu que par une information supplémentaire (par exemple déplacement vertical vers le bas pour nos éprouvettes en compression simple).

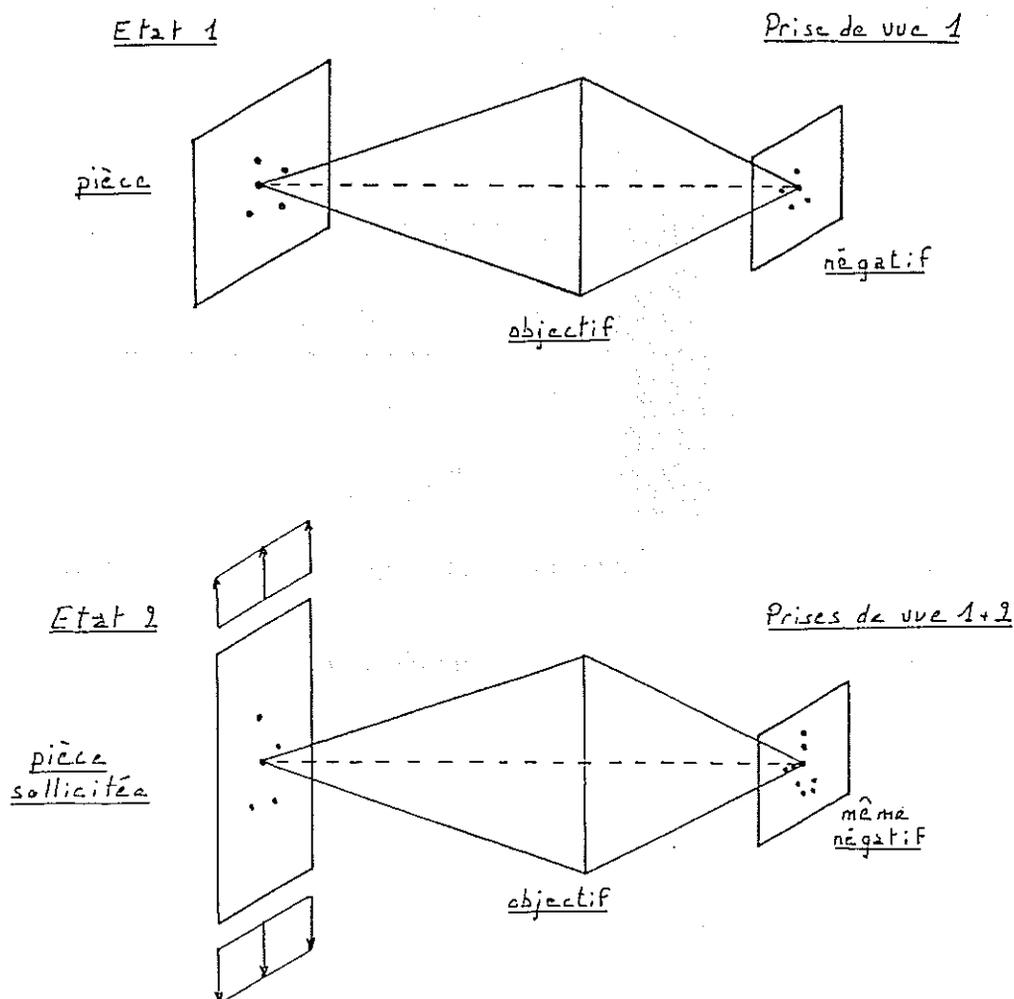


Figure 7. 3 : formation des "bipoints" sur le négatif.

Le banc de dépouillement automatique (figure 7. 5) permet d'une part de remplacer le manipulateur dans un travail fastidieux (nombreux points de mesures) [GROSSET 85] et pénible (éclairage laser) et d'autre part d'obtenir une meilleure précision sur les mesures [ANSARI 87] [. Cette précision se traduit par :

- une erreur de $\pm 0,5$ degré sur l'angle du déplacement
- une erreur de moins de 3% sur la valeur du déplacement et ceci dans les cas les plus défavorables (petits déplacements - grandes franges)
- une erreur de l'ordre de 1% sur le rapport de grandissement.

La distance $L_{\text{neg. écran}}$ et la correspondance pixels - mètres sont évaluées par la procédure d'étalonnage qui utilise un négatif de référence et procure une excellente précision sur le rapport de ces valeurs.

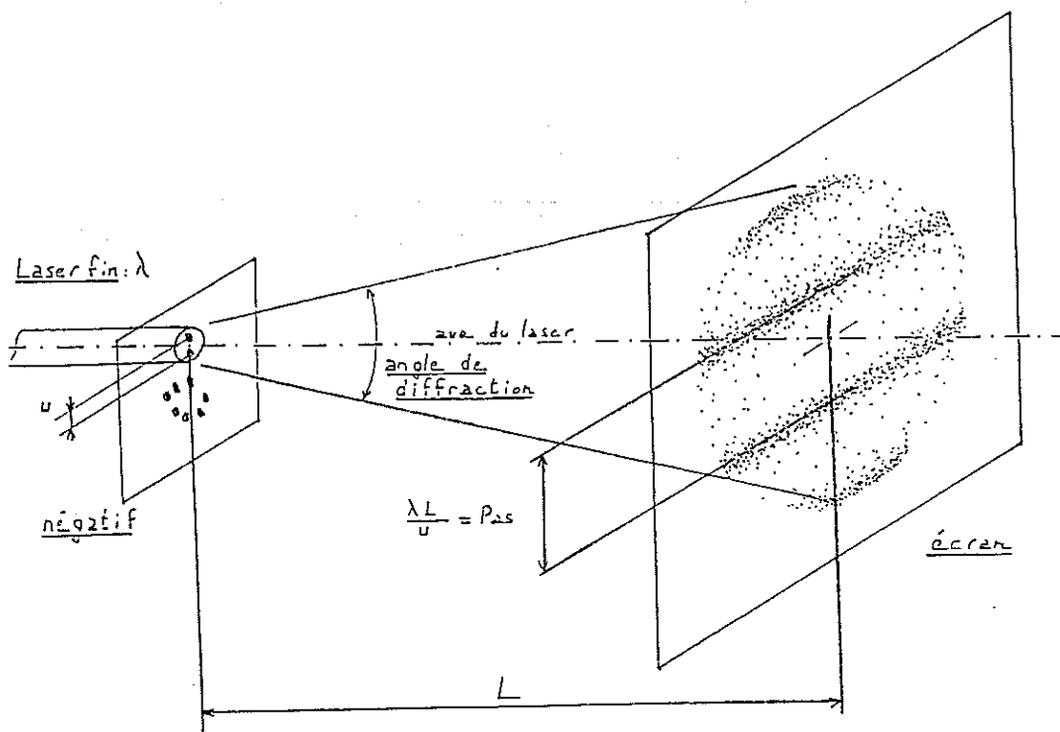


Figure 7. 4 : restitution de déplacement local.

Le dépouillement automatique est interactif et permet de contrôler que les résultats fournis correspondent aux informations contenues dans les clichés. Le négatif est mu par rapport au faisceau laser fin à l'aide de moteurs pas à pas à un micron près. Il est donc aisé de réaliser des "zooms" avec précision sur la totalité du champ couvert.

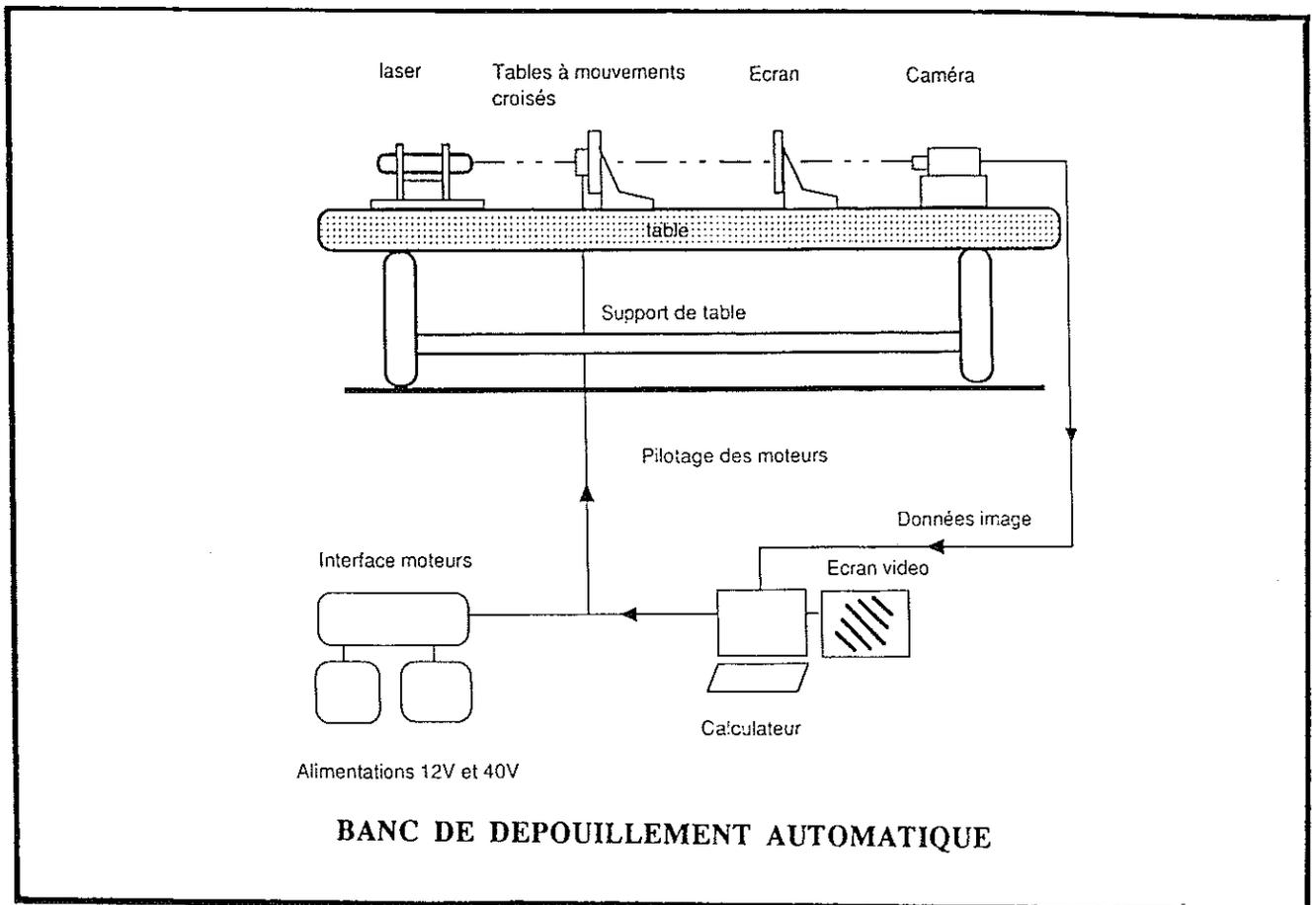


Figure 7. 5 : schéma de principe du banc de dépolissement automatique.

7. 3. ESSAIS SUR MORTIER NORMAL ET PATE DE CIMENT NORMALE

7. 3. 1. OBJECTIFS

Les ruptures en compression pour ces types de matériaux donnent naissance à des fissures qui s'ouvrent parallèlement à la direction de la plus grande contrainte principale. En absence d'interaction pour les fissures rectilignes de notre modèle numérique aucune simulation de ce phénomène ne peut être conduite.

Plusieurs objectifs ont suscité la réalisation d'essais :

- juger de la possibilité de réaliser des essais en accord avec une modélisation plane,
- connaître des schémas de fissuration indispensables à intégrer dans le modèle numérique,
- savoir si l'on peut simuler une fissure d'ouverture nulle à l'état initial,
- mesurer l'effet du cisaillement sur la propagation des fissures,
- mesurer l'effet des conditions de contact des lèvres de fissure sur la rupture,
- comparer les modes de rupture avec ou sans granulats,
- découvrir les problèmes liés à de tel essais et le manque de précision qui en découle.

La modélisation n'étant pas encore complète (couplage avec des méthodes de collocation...) elle ne permet pas pour l'instant de procéder à des identifications.

7. 3. 2. EPROUVETTES ET CONDITIONS D'ESSAI

Les éprouvettes prismatiques ont été réalisées en mortier normal et pâte de ciment normale avec du ciment CPJ 55 dans des moules 9x2x15cm (voir figure 7. 6). Des discontinuités de 2cm inclinées à 45 degrés par rapport aux faces et centrées ont été simulées de 2 façons différentes :

- une feuille de plastique disposée pendant le coulage puis retirée après durcissement a créé une discontinuité sans contact de 0,4mm d'épaisseur (retrait non compris).
- une fine feuille de papier disposée pendant le coulage a créer une discontinuité avec contact.

Lors de l'essai les éprouvettes était âgées de 10 mois.

Les essais en compression simple ont été effectués sur une machine Instron mécanique à la vitesse de 0,1 mm/mn. Aucune précaution vis à vis du fretage ne fut prise afin de voir si les contraintes de cisaillement dues au conditions de contact suffisaient à stopper la fissuration. Des capteurs à inductions ont permis de mesurer le raccourcissement de l'éprouvette et le déplacement hors plan de la face photographiée.

7. 3. 3. RESULTATS D'ESSAIS

Les champs de déplacements incrémentaux correspondants aux clichés 8 et 13 sont visualisés par les figures 7. 10 et 7. 11 . Les zones photographiées correspondent aux surfaces repérées par les signes Δ et $*$ de la figure 7. 8 de droite et les incréments de déplacement correspondants sont repérés par ces mêmes signes sur la figure 7. 8 de gauche. La courbe effort-déplacement retrace les charges et décharges effectuées. On constate qu'il y a de l'énergie dissipée dans une décharge et il est essentiel de pouvoir attribuer à cette énergie consommée la part liée à la création de surfaces et celle liée au frottement (d'autres mécanismes de dissipation ne sont pas abordés ici). Une bonne modélisation de l'évolution de l'endommagement est tributaire de ces proportions.

Les discontinuités de déplacement sont calculées par différence des déplacements de part et d'autre de la fissure. La zone occupée par la fissure sur le négatif ne forment pas de franges d'interférences et il faut s'écarter de part et d'autre des lèvres pour obtenir des vecteurs déplacements (points sans vecteurs sur les figures 7. 10 et 7. 11). On peut ainsi être informé de la présence de "perturbations" par présence ou non de franges d'interférences. Les champs des figures de droite sont identiques à ceux des figures de gauche au champ solide correspondant à la moyenne des vecteurs déplacements près. Les perturbations locales apparaissent mieux ainsi.

L'essentiel information fournie par l'essai dépouillé (figure 7. 9) est le fonctionnement en "mode I+II" de la fissure initiale. En effet, on constate que la fissure initiale n'est pas bloquée puisqu'elle a tendance à s'ouvrir dans le déplacement tangentiel relatif de ses lèvres. Il est donc primordial de connaître la loi qui régit le contact (frottement + ouverture) pour modéliser convenablement la fissuration en zone comprimée.

La direction de la fissure initiale n'est pas stable [NEMAT-NASSER 82] et montre qu'une telle fissuration (taille de la fissure initiale) ne peut se produire de façon naturelle. Cet essai met en évidence la faiblesse de notre modélisation au stade actuel et il apparaît que les couplages possibles sont indispensables pour l'aboutissement des ces travaux.

Toutefois, le fait que les conditions d'appui (fretage) puisse stopper la fissure et que la propagation de celle-ci implique une discontinuité de déplacements tangentiels nous conforte dans le choix de chercher à mieux décrire et à intégrer aux modélisations les conditions de contacts unilatérales pour la fissuration des matériaux utilisés en compression.

La modélisation plane de la fissuration est satisfaisante pour les fissures centimétriques mais pas pour celles de plus petites tailles qui ne "traversent" pas l'éprouvette.

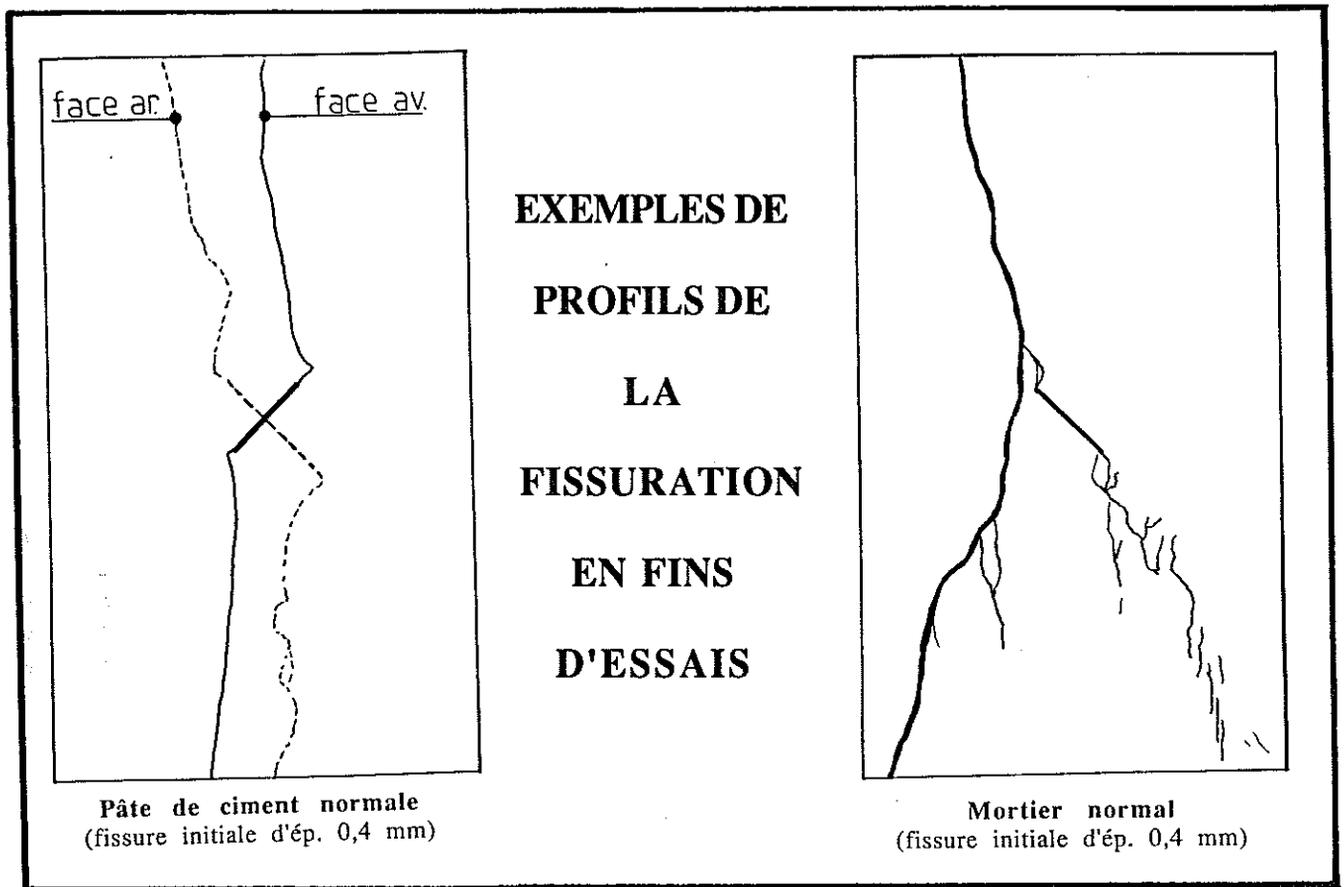


Figure 7. 6

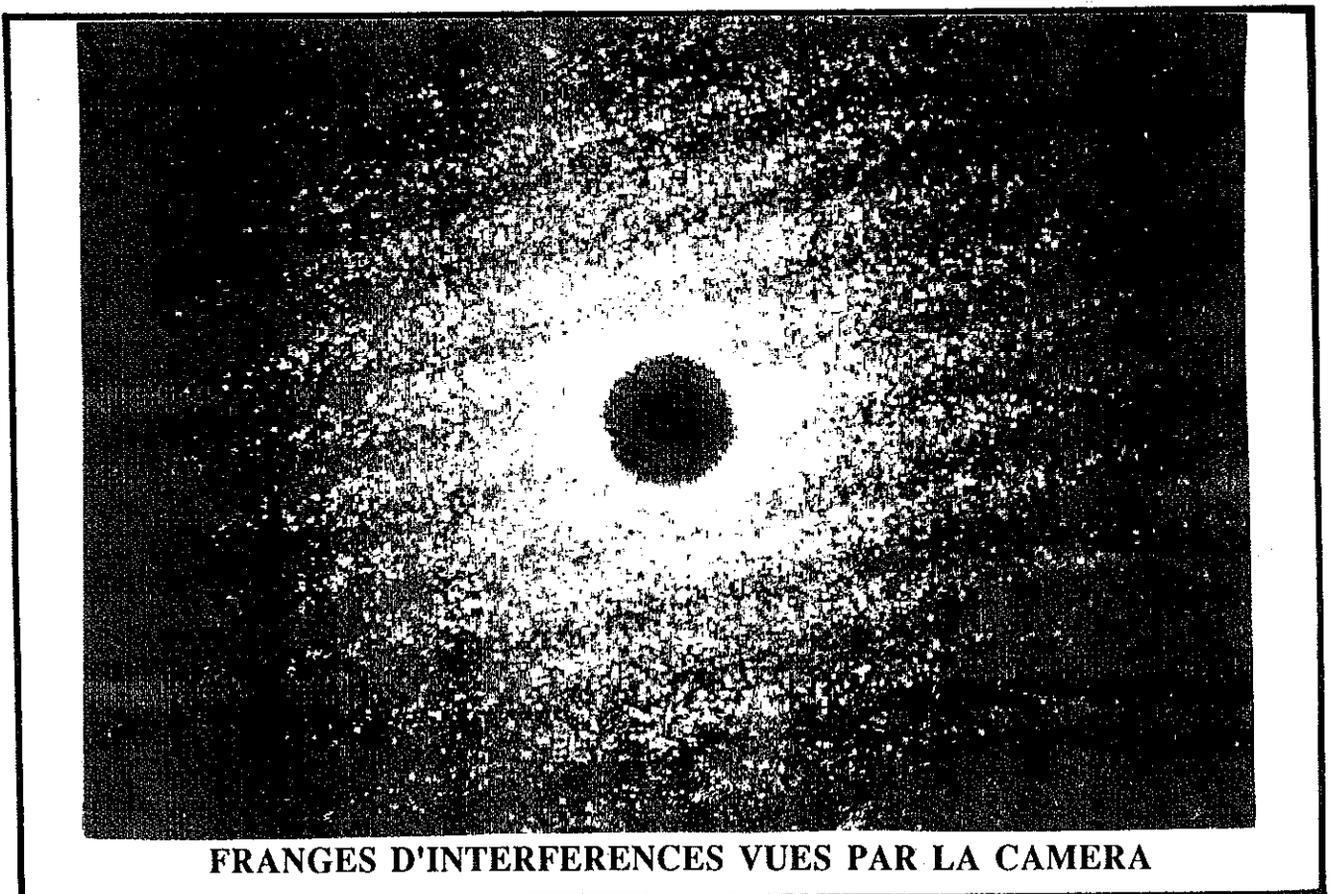


Figure 7. 7

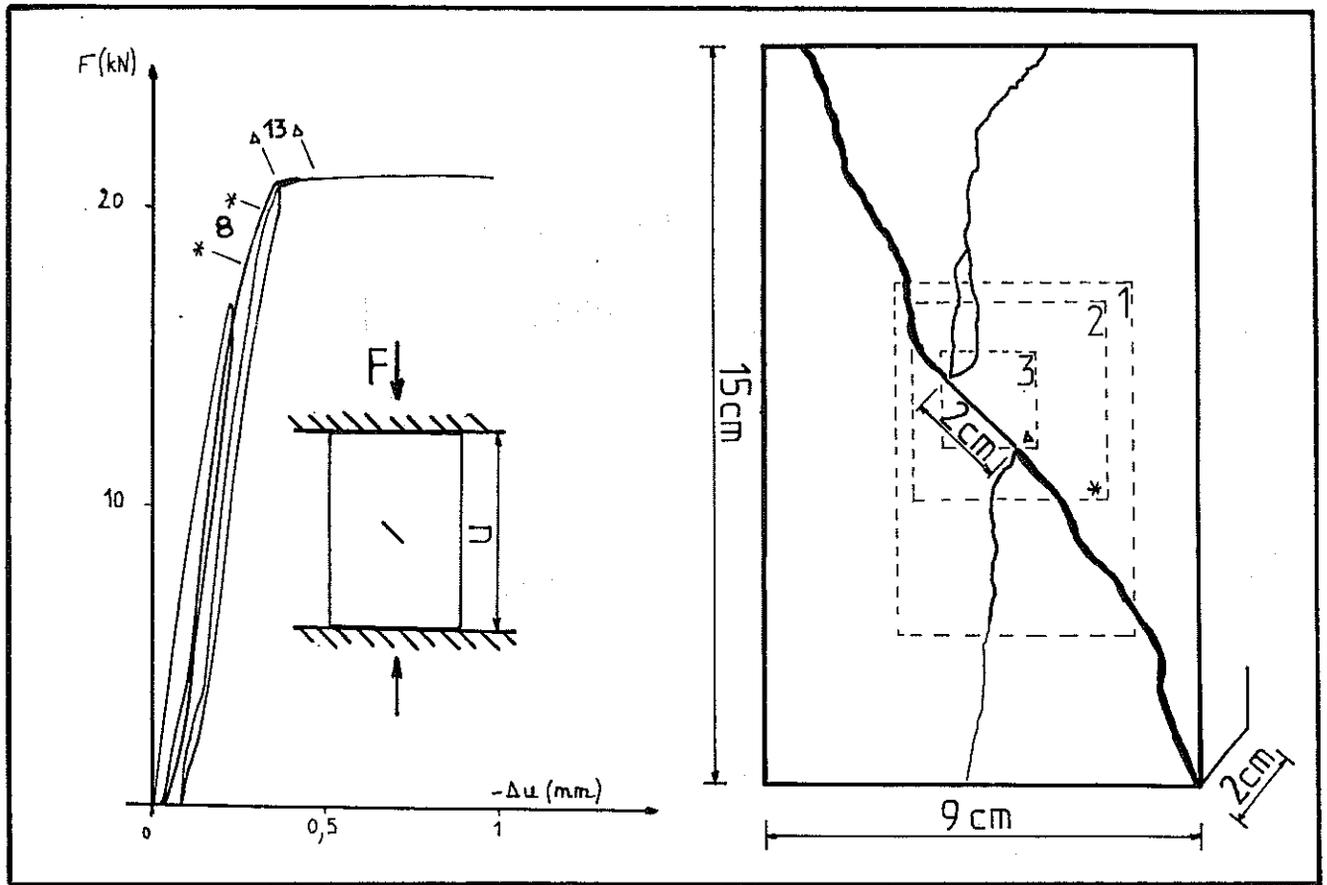


Figure 7. 8

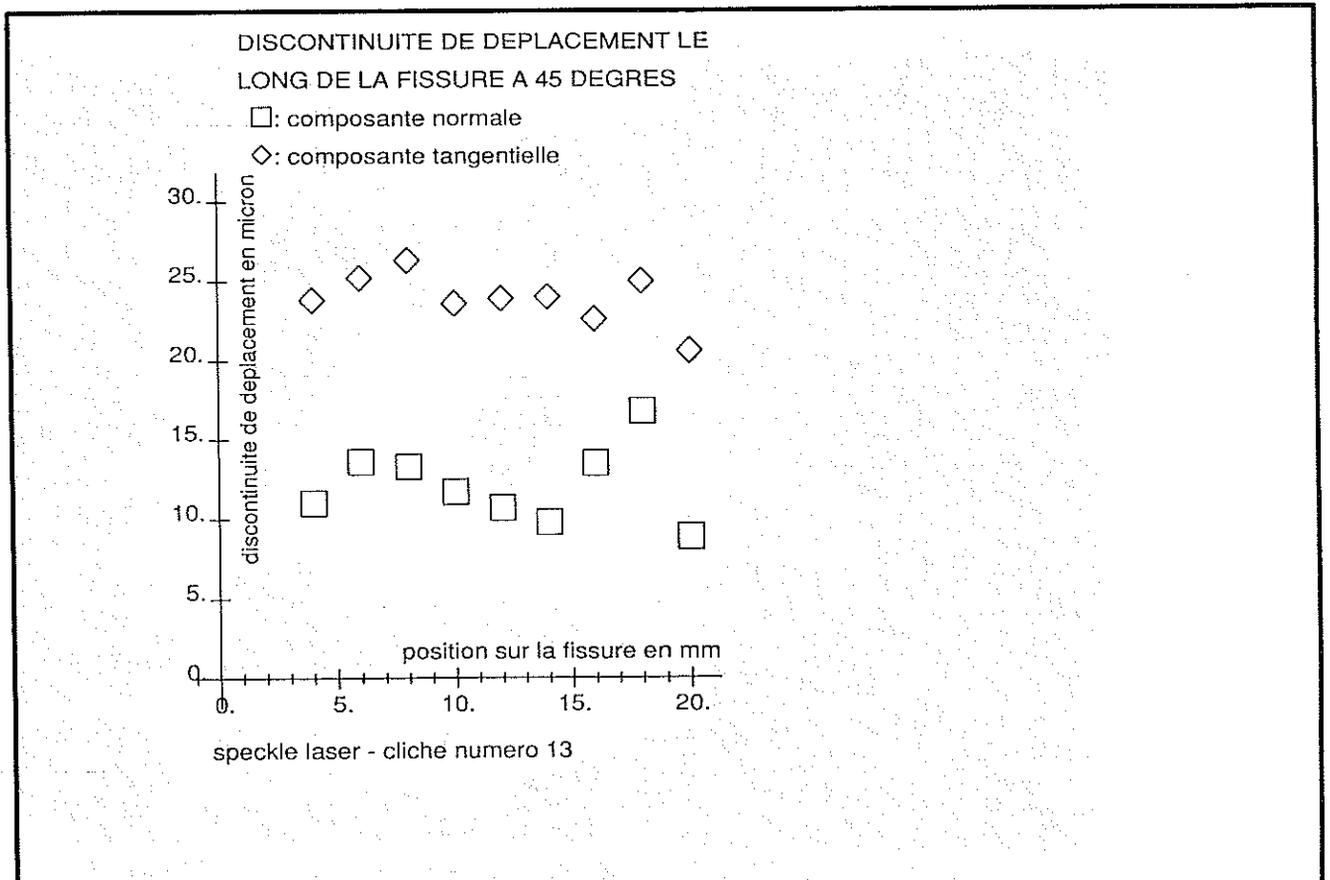


Figure 7. 9

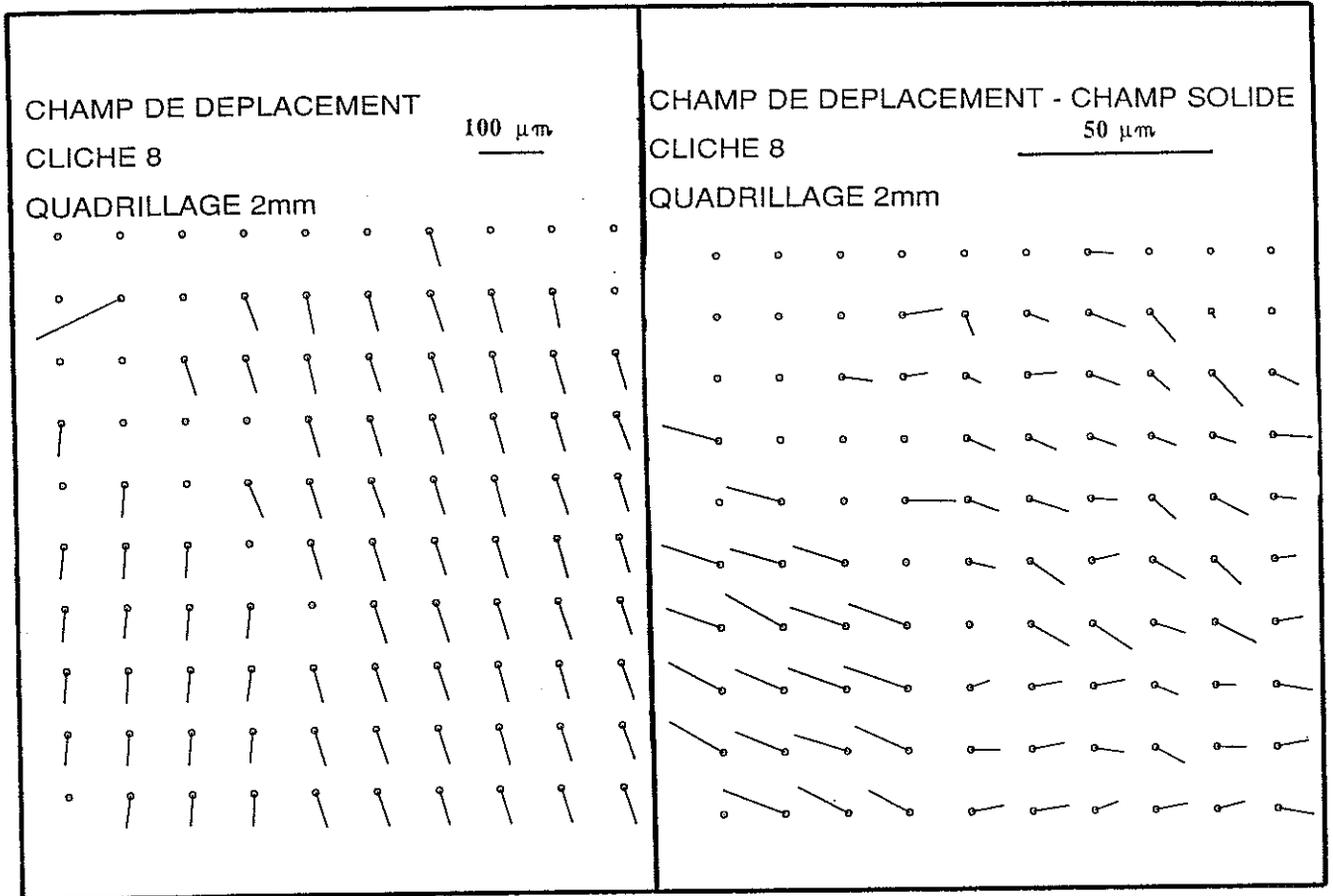


Figure 7. 10

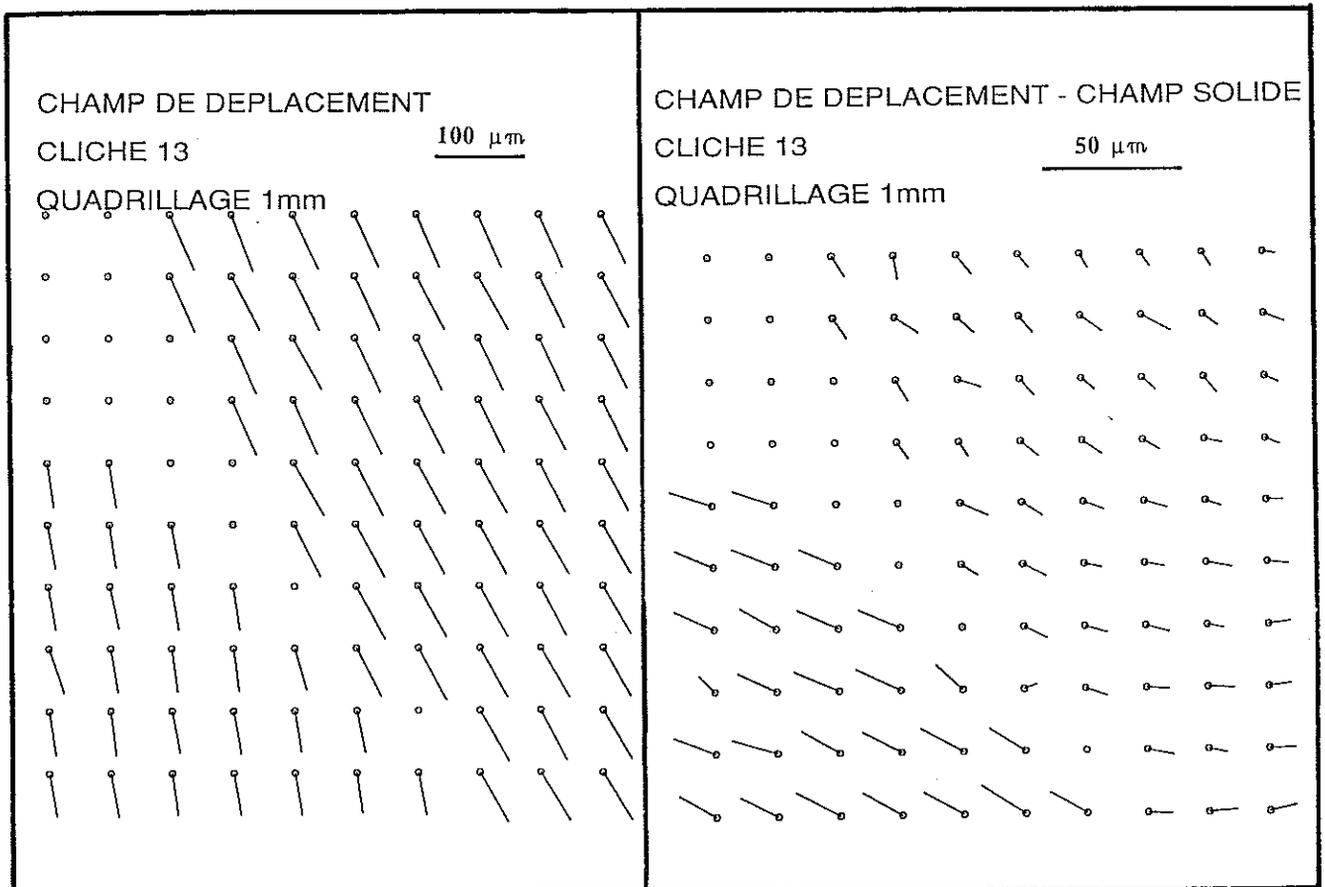


Figure 7. 11

7. 4. CONCLUSIONS

La méthode par granularité laser est adaptée à la modélisation numérique à l'échelle mésoscopique. Elle permet de fournir des résultats capables de valider des modèles. Cependant pour la modélisation des loi d'interface, notamment pour des fissures micrométriques, sa résolution peut être insuffisante. En effet une discontinuité de déplacement pour une fissure telle que nous la modélisons vaut :

$$O_F = \frac{4 \Delta P a}{E} \quad \text{pour une pression interne } P \text{ uniforme.}$$

Pour un béton classique, on peut estimer E à 35000 MPa et P à 35 Mpa (pression interne fictive engendrée pour des contraintes à la ruine). La technique étant incrémentale, entre 2 clichés on peut estimer ΔP à 5 Mpa. On a donc O_F de l'ordre de 5 μm pour une taille a de fissure de 1 cm. Les mesures nécessaires à l'identification des lois de contact seront peu précises en deçà de cette taille.

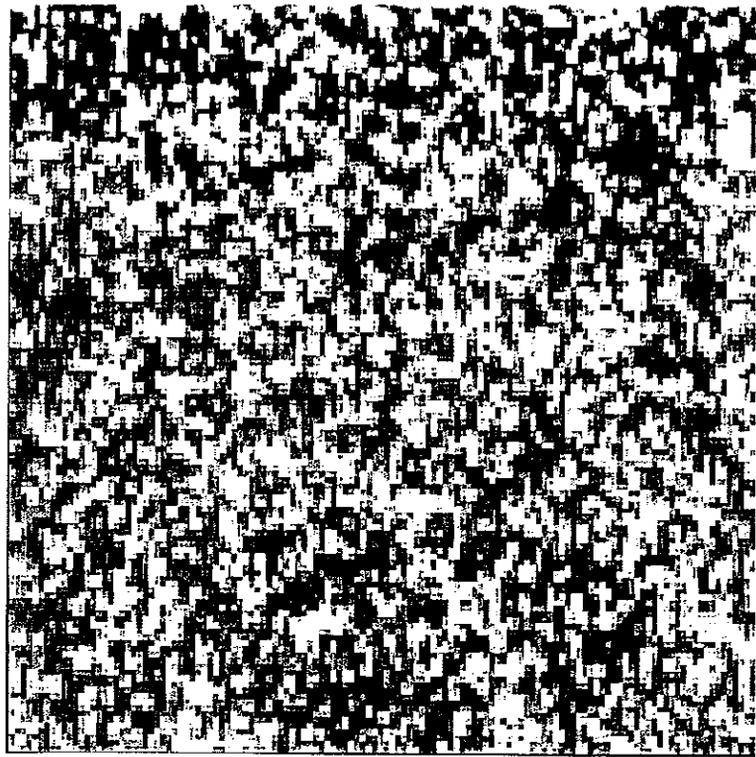
La fissuration est plus diffuse dans les éprouvettes en mortier du fait de la présence d'inclusions qui bloquent ou détournent les fissures alors que pour les éprouvettes en pâte de ciment il n'y a pas de zone microfissurée visible à l'oeil en fond de fissure.

La discontinuité d'ouverture au niveau de la fissure initiale est du même ordre de grandeur que la discontinuité de déplacements tangentiels. Les effets de cette ouverture favorisent les extensions de matière environnante. Cet effet peut aisément être pris en compte au niveau de la modélisation numérique (voir chapitre 2.) pour autant que les relations entre discontinuités de déplacements tangentiels et ouvertures soit connues. Toutefois on peut s'attendre à ce que la convergence ne soit pas améliorée par cet ajout de terme au niveau du second membre.

La prise en compte d'inclusions de forme circulaire devrait permettre d'enrichir la connaissance des interactions sur la diffusion de la fissuration pour des matériaux à matrice fragile. La traduction de la compatibilité des contraintes et déplacements sur des contours circulaires au niveau de l'algorithme de calcul ne présente pas de difficulté majeure compte tenu des expressions qui apparaissent au chapitre 4. Bien que la modélisation soit bi-dimensionnelle et qu'il soit délicat de corréler des informations bi-dimensionnelle et tri-dimensionnelle, une méthode par imprégnation est indiquée pour analyser la longueur des fissures en cours de diffusion.

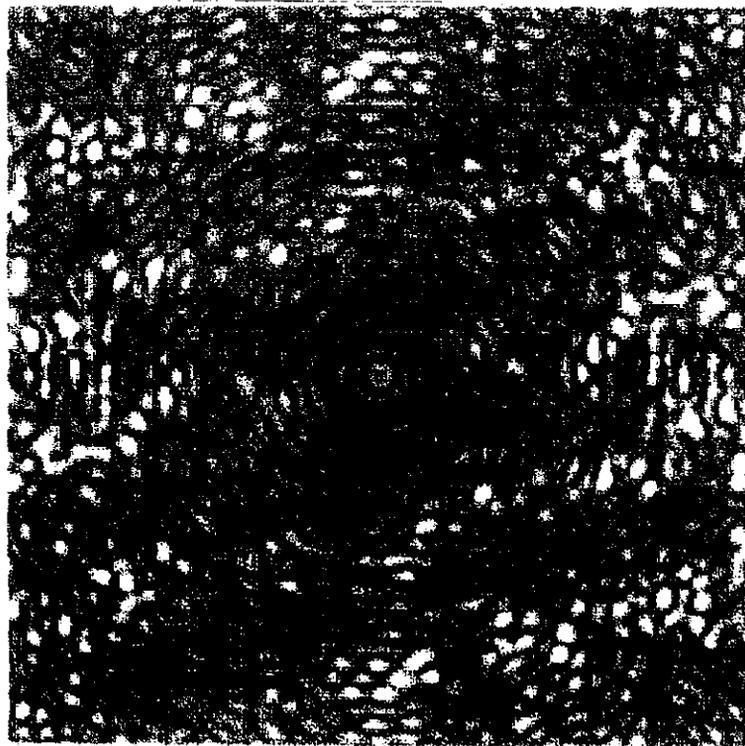
La technique de prise de vue ne permet pas de contrôler en temps réel la qualité des images (intensité, vibrations ...) ni de connaître le champ de déplacement. Afin de mettre à la disposition des mécaniciens (non opticiens...) un outil plus souple, on peut remplacer l'appareil photographique par une caméra. Les images de granularité sont digitalisées (figure 7. 12) et les franges d'interférences sont ensuite obtenues numériquement (figure 7. 13). Le dépouillement peut ensuite se faire par transformation de Fourier ou autre technique [FOND 89]. Actuellement il est bien sûr difficile de rivaliser avec la résolution des négatifs holographiques mais on peut espérer qu'à l'avenir les mécaniciens disposent d'une "boîte noire" qui fournira les champs de déplacements en temps réel.

Ce travail fait l'objet d'un dépôt de brevet (C. Fond et Y. Berthaud) et d'un mandat de fabrication et de commercialisation d'un appareil fabriqué par la société Courbon.



DIGITALISATION D'UNE IMAGE DE GRANULARITE

Figure 7. 4. 1.



FRANGES OBTENUES NUMERIQUEMENT

Figure 7. 4. 2.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

L'OUTIL DE CALCUL

Le logiciel de calcul comprend actuellement 5000 lignes d'instructions et commentaires. Le noyau de ce logiciel est constitué par les bibliothèques de fonctions. La technique est cependant "semi-semi-analytique" puisque les dernières intégrations nécessaires à constituer la matrice d'interactions sont numériques.

Les performances de l'outil de calcul peuvent être accrues. Les calculs nécessitent beaucoup d'opérations pour construire la matrice d'interactions. Les possibilités d'accélération des calculs sont nombreuses (calculs parallèles, méthode d'intégration, coefficients négligeables non calculés...). Bien que le nombre d'inconnues soit peu élevé en regard des problèmes à traiter, on a tendance à fixer la dimension du problème d'élasticité en fonction du temps calcul nécessaire sur le matériel disponible. Pour un même calculateur il faut donc améliorer l'algorithme de calcul pour augmenter ses capacités (ou limiter nos exigences...).

Des conditions aux limites en déplacements sont facilement imposables en utilisant une bibliothèque de méthode de collocation. Des éléments supplémentaires seraient en effets les bienvenus : fissures non rectilignes, fissures débouchantes. L'utilisation des potentiels du chapitre 7. 7. 2. n'a pas encore été validée pour les fissures "branchées". La cinématique de ce type de formulation ne permet pas d'ouvrir le point de contact des fissures. Cette condition d'ouverture pourra jouer un rôle plus ou moins local. Les fissures qui se coupent sont modélisables par la technique de superposition à condition de choisir des fonctions discontinues pour décrire les pressions fictives [BENVENISTE 88].

Toutefois les inclusions sont à notre portée puisque les contraintes et déplacements sur des contours circulaires se développent naturellement en séries de Fourier. La diffusion de la fissuration est influencée par la présence d'inclusions [ERDOGAN 74] [HORII 85] Il suffit de traduire les continuités en contraintes et déplacements sur un disque et une cavité circulaire (formes cylindriques). Un système linéaire sera obtenu en écrivant que :

- la superposition des champs de contraintes analytiques dus aux pressions fictives \vec{D} sur la matrice correspond aux conditions aux limites en contraintes sur les contours des cavités : action du chargement extérieur \vec{S} plus action de l'inclusion \vec{K} .

$$[F] \vec{D} = \vec{S} + \vec{K}$$

- la superposition des champs de déplacements analytiques dus aux pressions fictives \vec{D} sur la matrice correspond aux déformées \vec{U} des cavités qui sont compatibles avec les déformées \vec{U} des inclusions.

$$[F'] \vec{D} = \vec{U}$$

- le disque correspondant à l'inclusion subit une déformée \vec{U} sous l'action \vec{K} de la matrice.

$$[A] \vec{U} = \vec{K}$$

\vec{U} décrit les déplacements normaux et tangentiels inconnus de l'interface.

[F] est la matrice d'interactions du chapitre 1.

[F'] relie les déplacements normaux et tangentiels \vec{U} induits sur les contours des cavités aux pressions fictives normales et tangentiellees sur ces contours.

[A] relie les contraintes normales et tangentiellees appliquées sur des disques aux déplacements normaux et tangentiels \vec{U} sur les contours de ces disques. Les disques étant indépendants, la matrice [A] est une matrice bande.

\vec{S} décrit les conditions aux limites en contraintes de la même façon qu'avec la méthode de superposition et \vec{D} représente les pressions fictives inconnues à l'interface.

\vec{K} décrit les contraintes supplémentaires inconnues sur le contour circulaire provoquées par la différence de comportement (module d'Young et coefficient de Poisson) des deux milieux, matrice et inclusion. C'est l'action de l'inclusion sur la matrice.

Le cas des fissures droites partiellement ouvertes et partiellement frottantes est aussi abordable par la technique de superposition. Il ne serait cependant pas simple de gérer la convergence vers la "partition" de chaque fissure en longueur d'ouverture et longueur (inconnue) de fermeture au niveau de l'algorithme de calcul. La fissure serait toujours considérée comme un seul élément et cette "partition" serait effectuée par les répartitions des pressions fictives qui devraient en toute rigueur être décrites par morceau sur une même fissure (pression normale fictive sur la partie ouverte seule par exemple).

La sensibilité à la description des répartitions des contraintes permettra de choisir les fonctions qui fournissent les meilleures solutions. On pourra par exemple essayer les polynômes de Chebyshev...

LES INTERACTIONS

L'aspect bi-dimensionnel des études numériques restreint les possibilités d'investigations. Cependant ce type d'approche n'a pas l'ambition de procéder à un passage "micro-macro" quantitativement fidèle. Son but est plutôt de qualifier et quantifier à titre comparatifs les effets des paramètres des modèles, leurs évolutions et leurs couplages afin de mieux comprendre les phénomènes d'endommagement des matériaux à matrice fragile. De telles démarches trouvent leurs issues aussi bien dans la construction de meilleurs modèles de comportement macroscopiques que dans l'amélioration des matériaux pour une utilisation définie.

Les interactions dépendent fortement des modèles géométriques de fissuration et porosité. De nombreuses simulations doivent être envisagées pour cerner les limites des effets de la fissuration, des interactions et des lois d'interface. Les limites de certains modèles probabilistes ou certaines méthodes d'homogénéisation peuvent être ainsi définies.

La prise en compte des interactions est essentielle dès qu'on s'intéresse à la propagation. En effet, en compression les fissures s'ouvrent sous l'effet des interactions si elle sont droites ou à cause de leur forme dans le cas contraire. Il est donc important de pouvoir faire bifurquer les fissures et de pouvoir modéliser les fissures branchées. Le couplage avec les méthodes de collocation apporterait un complément naturel de la méthode de superposition.

La sensibilité du développement de la fissuration aux auto-contraintes d'élaboration est aussi digne d'intérêt pour la propagation et la porosité des bétons. L'ouverture initiale des fissures, les contraintes dues au retrait et la loi de contact très influentes sur le développement de la fissuration soulèvent le problème des possibilités d'identifications.

LOGICIELS UTILISES

calculs mathématiques formels :

Macsyma version 4.0, Symbolic inc. U.S A.

éléments finis et sorties graphiques :

Système Castem 2000 et programme Gibi version du 28/12/90, C.E.A. France.

Cesar version L.M.T. du 21/01/92 et Peggy 2-D version 1. 1. 2. , L.C.P.C. France

traitements de texte et dessins :

Word version 4.0

MacDraw II version 1. 1.

tableurs :

Sdidier, L.M.T.

Excel version 3.0

dépouillement automatique des franges d'interférence :

Interfere, commercialisé par Transvalor (développé par C. Fond et Y. Berthaud, L.M.T. - G.Re.Co. Géomatériaux (langage TurboPascal 3.0)

équations intégrales aux frontières :

logiciel personnel sur la base de l'ouvrage en référence en [BREBBIA 84] (langage Fortran)

méthode de superposition :

Crak versions 90 à 92, logiciel personnel (langage Fortran)

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] S. Andrieux, (1983), " Un modèle de matériau microfissuré, application aux roches et aux bétons ", *Thèse de Docteur Ingénieur de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées*.
- [2] F. Ansari et G. Ciurpita, (1987), " Automated fringe measurement in speckle photography ", *Applied Optics*, 26, p. 9.
- [3] Y. Belkacemi, (1990), " Méthode des discontinuités de déplacement en champ complexe ", *Thèse de Doctorat de l'Université de Lille Flandres Artois*.
- [4] Benaija, Boulay, Delahousse, Bubuet, Torrenti, Berthaud et Fond, (1990), " Etude de la localisation dans un grès des Vosges ", *Rapport Scientifique du G.Re.Co. "Géomatériaux"*, p. 181 à 184.
- [5] Y. Benveniste, G.J. Dvorak, J. Zarzour and E.C. Wung, (1988), " On interacting cracks and complex configurations in linear elastic media ", *Department of Civil Engineering, Rensselaer Institute, Troy, NY 12180, U.S.A.*
- [6] Y. Berthaud et G. Pijaudier-Cabot, (1990), " Nonlocal continuum and micromechanics of damage in quasi-brittle materials ", " *Micromechanics of failure of quasi-brittle materials* ", Edited by S.P. Shah, S.E. Swartz and M.L. Wang, Elsevier Pub., Albuquerque USA, p. 125 à 134.
- [7] Y. Berthaud, (1988), " Mesure de l'endommagement du béton par une méthode ultrasonore", *Thèse de Doctorat de l'Université de Paris 6*.
- [8] Y. Berthaud, E. Ringot, D. Fokwa, (1991), " A test for delaying localization in tension. Experimental investigation. ", *Cement and Concrete Research*, 21, p. 928 à 940.
- [9] J. P. Bournazel, J. L. Clément, D. Breysse, H. Hormain, (1991), " Effet d'un chargement mécanique sur la micro-structure d'un béton ", *Rapport Interne n°116, Laboratoire de Mécanique et Technologie, Cachan*
- [10] C. A. Brebbia, J. C. F. Telles and L. C. Wrobel, (1984), " Boundary element techniques - Theory and applications in engineering ", *Ed. by Springer-Verlag*.
- [11] D. Breysse, D. Fokwa, P. Geymonat, F. Hild, G. Pijaudier-Cabot, (1992), " Approches numériques et expérimentales pour la prise en compte d'un désordre initial ", *Rapport de fin de contrat d'Action Thématique Programmée "matériaux hétérogènes", C.R.N.S. (en cours de classement)*.
- [12] D. Bruhat, J. P. Gervais, J. L. Robert, (1990), " Suivi par émissions acoustiques de la fissuration d'éprouvettes en béton ", *Compte rendu d'essais 6 et 7 juin 1989, L.C.P.C. Nantes*.
- [13] A. Bouhaddane, (1987), " Application de l'intégrale de Cauchy à la méthode des discontinuités de déplacement et autres méthodes de collocation ", *Thèse de Doctorat de l'Université de Lille Flandres Artois*.
- [14] H. D. Bui, (1983), " Associated path independant J -Integrals for separating mixed modes ", *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 31, 6, p. 439 à 448.

- [15] G. Cadoret, (1979), " Nouvelles méthodes optiques pour l'étude du comportement des structures et matériaux ", *Annales de l'Institut de Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, Série Essais et Mesures*, t.170, 373, p. 26 à 74.
- [16] A. Chudnovsky, A. Dolgopolsky, M. Kachanov, (1987), " Elastic interaction of a crack with a microcrack array ", *International Journal of Solids and Structures*, 23, 1, p. 1 à 10.
- [17] R. Dessailly, (1978), " Application des propriétés des champs de granularité à la détermination sans capteur des déplacements des déformations et des contraintes au sein des milieux tridimensionnels ", *Thèse de Docteur Ingénieur de l'Université de Poitiers*.
- [18] J. Desrues, M. Mokni et F. Mazerolle, (1991), " Tomodensitometric and localization in sands ", *X ECSMFE, Florence (Italie)*.
- [19] F. Erdogan, G. D. Gupta, M. Ratwani, (1974), " Interaction between a circular inclusion and a arbitrarily crack ", *Journal of Applied Mechanics*, p. 1007 à 1013.
- [20] F. Erdogan, (1962), " On the stress distribution in plates with collinear cuts under arbitrary loads ", *Proceedings, Fourth U.S. National Congress of Applied Mechanics*, p. 547 à 553.
- [21] J. L. Fléjou, (1992), " Modélisation du comportement des liaisons semi-rigides dans les structures de génie civil sous sollicitations cycliques ", *Thèse de Doctorat de l'Université de Paris 6, (en cours)*.
- [22] C. Fond, (1989), " Automatisation d'un banc de mesure de champs de déplacements par granularité laser ", *Mémoire de D.E.A. Mécanique et Matériaux option Mécanique de l'Endommagement au L.M.T. de Cachan*.
- [23] M. Françon, (1978), " La granularité laser (speckle) et ses applications en optique ", *éditions Masson*.
- [24] J. W. Goodmann, (1975), " Statistical properties of laser speckle patterns ", *Laser speckle and related phenomena, Ed. by Springer-Verlag, Dianty, p. 9 à 75*.
- [25] E. Grosset, (1985), " Détermination de l'intégrale de Rice et de l'ouverture de fissure par granularité laser ", *Thèse de 3ème Cycle de l' Université de Poitiers*.
- [26] S. D. Hallam et M.F. Ashby, (1986), " The failure of brittle solids containing small cracks under compressive Stress States ", *Acta Metallica*, 34, p. 497 à 510.
- [27] J. P. Henry et F. Parsy, (1982), " Cours d'élasticité ", *Editions Dunod Université*.
- [28] J. P. Henry et G. Caignaert, (1982), " Exercices d'élasticité ", *Editions Dunod Université*.
- [29] H. Horii and S. Nemat-Nasser, (1985), " Elastic fields of interacting inhomogeneities ", *International Journal of Solids and Structures*, 21, 7, p. 731 à 745.
- [30] M. Kachanov, (1985), " A simple technic of stress analysis in elastic solids with many cracks ", *International Journal of Fracture*, 28, R11 à R19.
- [31] M. Kachanov, (1987), " Elastic solids with many cracks - a simple analysis ", *International Journal of Solids and Structures*, 1, p. 23 à 43.

- [32] M. Kachanov and J. P. Laures, (1988), " Three-dimensionnal problems of strongly interacting arbitralily located penny-shaped cracks ", *International Journal of Fracture*, 41, p. 289 à 313.
- [33] C. La Borderie, (1990), " Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable ", *Thèse de Doctorat de l'Université de Paris 6*.
- [34] J. Mazars, (1976), " Prévision de la rupture des structures en béton par la mécanique de la rupture ", *Thèse de Doctorat de 3^{ème} Cycle de l'Université de Paris 6*.
- [35] J. Mazars, (1984), " Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure ", *Thèse de Doctorat d'Etat à l'Université de Paris 6*.
- [36] J. Mazars, Y. Berthaud et S. Ramtani, (1990), " The unilateral behavior of damage concrete ", *Engineering Fracture Mechanics*, 35, 4/5, 629-635
- [37] E. Montagut and M. Kachanov, (1988), " On modelling a microcracked zone by 'weakened' elastic material and on statistical aspects of crack-microcrack interactions", *International Journal of Fracture*, 237, R55 à R162
- [38] Y. Murakami, (1988), " Stress intensity factors handbook ", *Ed. by Pergamon Press*.
- [39] N. I. Muskhelishvili, (1953), "Some basics problem of mathematical theory of elasticity ", *Noordhoff, Groningen*.
- [40] S. Nemat-Nasser et H.Horii, (1982), " Compression induced non planar crack extension with application to splitting, exfoliation and rockburst ", *Journal of Geophysic Research*, 87, p.6805 à 6821.
- [41] R. E. Peterson, (1974), " Stress concentration factors ", *Ed. by John Wiley & Sons*.
- [42] G. Pijaudier-Cabot and Z. P. Bazant, (1990), " Nonlocal damage theory ", *Journal of Engineering Mechanic, A.S.C.E.*, t.113, 10, p. 1512 à 1533.
- [43] G. Pijaudier-Cabot et Y. Berthaud, (1990), " Effet des interactions dans l'endommagement d'un milieu fragile - formulation non locale ", *C.R.A.S.*, t. 310, série II, p. 1577 à 1582.
- [44] S. Ramtani, (1990), " Description du comportement du béton endommagé par un modèle d'endommagement anisotrope avec description du caractère unilatéral", *Thèse de Doctorat de l'Université de Paris 6*.
- [45] S. P. Timoshenko and J. N. Goodier, (third edition), " Theory of elasticity ", *McGraw-Hill Book company*.
- [46] L. G. Ting and Z. R. Zhong, (1990), " The strength of a finite body with multiple cracks ", *Engineering Fracture Mechanics*, 35, 1/2/3, p. 67 à 78.
- [47] J. M. Torrenti, (1987), " Comportement multiaxial du béton : aspects expérimentaux et modélisation ", *Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées*.

[48] J. G. M. Van Mier, (1984), " Strain softening under multiaxial loading conditions ", *Thèse de Doctorat : Technische Wetenschappen aan de Technische Hogeschool Eindhoven.*

[49] H. P. Yin, (1992), " Modélisation des discontinuités de déplacement dans les solides élastiques et application à la microfissuration ", *Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.*

