

INTRODUCTION	127
FORMULATION CLASSIQUE	127
FORMULATION VARIATIONNELLE	129
Rappel de l'expression des principes	129
Solution optimale	130
Construction de systemes linéaires.....	131
Evaluation des intégrales pour des inclusions sphériques	133
Alternative à l'évaluation exacte des integrales de type J et K.....	134
ESTIMATION DES PROPRIETES ELASTIQUES POUR UN NOMBRE FINI D'INCLUSION.....	134
RÉFÉRENCES	135

APPLICATION DE PRINCIPES VARIATIONNELS CLASSIQUES EN ELASTICITE LINEAIRE AU PROBLEME DE L'INCLUSION EQUIVALENTE PERSPECTIVES D'EVOLUTION ET PROBLEMATIQUES ASSOCIEES

C. Fond en collaboration avec P. Gilormini*

**Laboratoire de Mécanique et Technologie de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan*

INTRODUCTION

Notre volonté est de résoudre des problèmes d'élasticité linéaire pour des milieux hétérogènes. L'estimation des propriétés élastiques moyennes ne constitue pas l'objectif principal puisque nous nous intéressons aux phénomènes d'endommagement. Nous cherchons donc à connaître les tenseurs de localisation en présence d'interaction mécanique. En pratique, les hétérogénéités qui interagissent seront sphériques.

FORMULATION CLASSIQUE

Pour plus de clarté par la suite, plutôt que de considérer un seul champ de déformations libres ou de polarisation, s'annulant dans la matrice et prenant des valeurs non nulles dans les inclusions, nous considérerons dans les formulations plusieurs champs de polarisation indépendants, chacun étant identifié par un exposant relatif à l'inclusion dans laquelle seulement il est non nul. Rappelons l'équation obtenue par la méthode de l'inclusion équivalente (voir par exemple [1], [2] ou [3]) :

$$\mathbf{C}^p(\mathbf{x})(\boldsymbol{\varepsilon}^0(\mathbf{x}) + \sum_{q=1}^N \mathbf{D}^q(\mathbf{x} - \mathbf{x}_q) \mathbf{B}^q) = \mathbf{C}^0(\boldsymbol{\varepsilon}^0(\mathbf{x}) + \sum_{q=1}^N \mathbf{D}^q(\mathbf{x} - \mathbf{x}_q) \mathbf{B}^q - \mathbf{B}^p(\mathbf{x})) \quad (1)$$

en tous points \mathbf{x} appartenant à des inclusions, où N est le nombre d'inclusions, \mathbf{B}^p désigne le tenseur des déformations libres de contrainte dans l'inclusion équivalente p , \mathbf{D}^p est un tenseur d'ordre 4 qui désigne l'effet de \mathbf{B}^p sur la déformation au point \mathbf{x} , $\boldsymbol{\varepsilon}^0(\mathbf{x})$ désigne le tenseur des déformations qui résulterait du chargement dans une matrice sans inclusion, que l'on considérera ici appliqué à l'infini, \mathbf{C}^p et \mathbf{C}^0 sont respectivement les tenseurs de souplesse de l'hétérogénéité p et de la matrice. En pratique \mathbf{C}^p sera constant dans les inclusions et $\mathbf{x}_q = (x_q, y_q, z_q)$ sera choisi au centre des inclusions.

En projetant les fonctions d'influence \mathbf{D}^q , les déformations libres \mathbf{B}^p , et le chargement à l'infini $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ sur la base de Taylor on obtient [4] :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}_p) &\approx \sum_{j=0}^p \sum_{a,b,c}^{0 \leq a+b+c \leq T} \beta_j^{(a,b,c)} (x - x_p)^a (y - y_p)^b (z - z_p)^c \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_p) &\approx \sum_{j=0}^p \sum_{a,b,c}^{0 \leq a+b+c \leq T} \varepsilon_j^{(a,b,c)} (x - x_p)^a (y - y_p)^b (z - z_p)^c \end{aligned} \quad (2)$$

où a , b , et c sont des entiers positifs ou nuls, j désigne les indices des tenseurs en notation contractée. $\beta_j^{(a, b, c)}$ sont des scalaires qui constitueront les inconnues du problème. De même, les fonctions d'influence D^{pq} des déformations libres sont projetées sur la base de Taylor de sorte que $D_{jk}^{(a, b, c, a', b', c')}$ soit défini par

$$D_{jk}^{(a, b, c, a', b', c')} \beta_k^{(a', b', c')} \approx \frac{1}{a! b! c!} \frac{\partial^a}{\partial x^a} \frac{\partial^b}{\partial y^b} \frac{\partial^c}{\partial z^c} D_{jk}^{(a, b, c)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_q) \Big|_{\mathbf{x}_p} \beta_k^{(a', b', c')} \quad (3)$$

On obtient donc :

$$\sum_{j=1}^6 C_{ij}^{(0p)} \left(\epsilon_j^{(a, b, c)} + \sum_{k=1}^6 \sum_{q=1}^N \sum_{a', b', c'}^{0 \leq a'+b'+c' \leq T} D_{jk}^{(a, b, c, a', b', c')} \beta_k^{(a', b', c')} \right) = \sum_{j=1}^6 C_{ij}^{(0p)} \left(\epsilon_j^{(a, b, c)} + \sum_{k=1}^6 \sum_{q=1}^N \sum_{a', b', c'}^{0 \leq a'+b'+c' \leq T} D_{jk}^{(a, b, c, a', b', c')} \beta_k^{(a', b', c')} - \beta_j^{(a, b, c)} \right) \quad (4a)$$

pour tous les exposants a , b , c et indices i , où $D_{jk}^{(a, b, c, a', b', c')}$ représente l'interaction entre $\beta_j^{(a, b, c)}$ et $\beta_k^{(a', b', c')}$. Un système linéaire est obtenu en tronquant les séries de Taylor à l'ordre T ($0 \leq a + b + c \leq T$) et en identifiant terme à terme pour les indices i et les triplets (a, b, c) . Le nombre de termes de la série croît rapidement avec l'ordre de troncature (table 1). On peut réécrire (4) sous forme condensée :

$$\mathbf{C}^p (\boldsymbol{\epsilon}^{0p} + \mathbf{D}^{pq} \boldsymbol{\beta}^q) = \mathbf{C}^0 (\boldsymbol{\epsilon}^{0p} + \mathbf{D}^{pq} \boldsymbol{\beta}^q - \boldsymbol{\beta}^p) \quad (4b)$$

où l'on somme sur les indices doublés et où $\boldsymbol{\beta}^p$ est le vecteur des déformations libres dans l'inclusion p , de dimension $6 \times T$, \mathbf{D}^{pq} est une matrice d'interaction non symétrique de dimension $(6 \times T)^2$ et t désigne le nombre de termes de la série de Taylor tronquée. Les champs de déformations obtenus sont continus par phase. Les champs de contraintes, sauf cas particuliers, ne sont pas équilibrés lorsqu'on considère le terme de gauche de l'éq. (4b). En effet, au passage des interfaces, dans le problème hétérogène, les pressions normales et tangentielles à ces interfaces présentent des discontinuités. Dans les inclusions dont le tenseur de complaisance est différent de celui de la matrice, les forces volumiques ne sont pas, sauf cas particulier, équilibrées¹.

L'intérêt de cette formulation réside dans le fait que l'on connaît analytiquement D^{pq} lorsque les inclusions sont ellipsoïdales et les déformations libres exprimées en série de Taylor. Cependant, cette formulation décrite par l'éq. (4a) a l'inconvénient de projeter l'opérateur D^{pq} sur la base de Taylor. Les champs de déformations contenus dans \mathbf{D}^{pq} se prêtent généralement mal à une description par une série de Taylor tronquée [5].

Ordre T de la série de	Nombre t de termes dans	Ordre du dernier	Nombre t de termes
------------------------	-------------------------	------------------	--------------------

¹ Lorsqu'on considère le cas hétérogène et pour des milieux isotropes, $\text{div } \sigma = 0$ n'est assuré que dans les hétérogénéités qui ont même coefficient de Poisson que la matrice.

Taylor	la série	terme de la série de Taylor	dans la série
0	1	6	84
1	4	7	120
2	10	8	165
3	20	9	22
4	35	10	286
5	56

Table 1. Nombre de terme t des séries de Taylor en fonction de l'ordre T de troncature. Le nombre d'inconnues du système d'équation (4) vaut 6*T.

FORMULATION VARIATIONNELLE

RAPPEL DE L'EXPRESSION DES PRINCIPES

R. Hill [6], éclairé par les travaux de Z. Hashin et S. Shtrikman [7], a proposé d'appliquer les principes variationnels classiques en élasticité linéaire aux milieux hétérogènes. Dans notre cas, nous disposons de champs induits par des déformations libres, superposables puisque la matrice est supposée avoir un comportement élastique linéaire. La loi de comportement est partout respectée pour le problème de l'inclusion équivalente (terme de droite de l'éq. (4a)). Les champs respectent les conditions aux limites à l'infini puisque les perturbations liées aux inclusions s'y annulent. Les champs de déplacements sont continus. Les champs de contraintes sont statiquement admissibles pour le problème de l'inclusion équivalente (ce n'est pas le cas pour le problème hétérogène). Considérons la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ suivante, continue par domaine de phase pour un nombre N fini d'inclusions :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j^* = \boldsymbol{\varepsilon}_j^0 + \sum_{q=1}^N \sum_{l=1}^6 D_{jl}^q \mathbf{B}_l^q \quad \text{ou encore} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{D}^q \mathbf{B}^q \quad (5)$$

On remarque que $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ vaut $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ à l'infini, qu'il est continu par domaine de phase et qu'il dérive d'un champ de déplacement continu. On peut construire un champ de contrainte auto-équilibré $\boldsymbol{\sigma}^*$, statiquement admissible et continu par phase, à l'aide de $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ et des déformations libres \mathbf{B}^p .

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{C}^0 (\boldsymbol{\varepsilon}^* - \mathbf{B}^p) = \mathbf{C}^0 \boldsymbol{\varepsilon}^* + \boldsymbol{\tau}^{p*} \quad \text{dans } V_p \quad (6)$$

On définit ainsi le classique tenseur de polarisation des contraintes $\boldsymbol{\tau}^{p*} = -\mathbf{C}^0 \mathbf{B}^p$. Le tenseur de polarisation des déformations, nommé $\boldsymbol{\eta}^*$ dans [6], n'est autre que $-\mathbf{B}^p$ dans l'inclusion p.

$\boldsymbol{\varepsilon}^*$ et $\boldsymbol{\sigma}^*$ étant ainsi définis à partir de \mathbf{B}^p , on peut donc appliquer les inégalités suivantes qui découlent des principes variationnels classiques. Rappelons ces principes :

- pour des conditions aux limites (c. l.) exprimées en déplacements :

$$\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^* (\boldsymbol{\sigma}^* - \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}^*) - \boldsymbol{\tau}^* \boldsymbol{\varepsilon}^0 dV \leq 2 (E^0 - E) \leq \int_V \boldsymbol{\sigma}^* (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\varepsilon}^*) - \boldsymbol{\tau}^* \boldsymbol{\varepsilon}^0 dV \quad (7)$$

où $\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}$.

- pour des c. l. exprimées en efforts :

$$\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^* (\boldsymbol{\sigma}^* - \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}^*) - \boldsymbol{\eta}^* \boldsymbol{\sigma}^0 dV \leq 2 (E - E^0) \leq \int_V \boldsymbol{\sigma}^* (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\varepsilon}^*) - \boldsymbol{\eta}^* \boldsymbol{\sigma}^0 dV \quad (8)$$

En remarquant que le choix fait en (6) assure $\boldsymbol{\eta}^* \boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{\eta}^* \mathbf{C}^0 \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \boldsymbol{\tau}^* \boldsymbol{\varepsilon}^0$, on obtient l'égalité entre (7) et (8), mais on perd la notion de conditions aux limites précisément définies. En effet, les champs construits s'annulent à l'infini mais ne sont pas identiquement nuls. On retrouve bien que le terme $(E - E_0)$ change de signe selon que l'on définit les conditions aux limites en déplacements ou en efforts.²

Pour une solution exacte on a $\mathbf{C}^0 (\boldsymbol{\varepsilon}^* - \mathbf{B}^p) = \mathbf{C}^p \boldsymbol{\varepsilon}^* (= \boldsymbol{\sigma}^*)$ dans tous p. En remarquant que $\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{C}^p \mathbf{S}^p \boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\sigma}^* \mathbf{S}^p$ on s'aperçoit alors que (7) \Leftrightarrow (8) et que $2(E - E^0) = \int_V -\boldsymbol{\eta}^* \boldsymbol{\sigma}^0 dV$, pour des c. l. exprimées en efforts. Pour une solution approchée de bonne qualité, on approchera $2(E - E^0)$ par $\sum_{p=1}^N \int_{V_p} -\boldsymbol{\eta}^{p*} \boldsymbol{\sigma}^0 d\mathbf{x}_p$. En utilisant le formalisme des déformations libres, $\boldsymbol{\beta}^p = -\boldsymbol{\eta}^{p*}$, on obtient

$$2(E - E^0) \approx \pm \sum_{p=1}^N \int_{V_p} \boldsymbol{\beta}^p \boldsymbol{\sigma}^0 d\mathbf{x}_p \quad (9)$$

où V_p représente le volume de l'inclusion p, $\boldsymbol{\beta}^p$ désigne le tenseur des déformations libres approché dans V_p et avec le signe + pour des c. l. exprimées en efforts et - pour des c. l. exprimées en déplacements.³

SOLUTION OPTIMALE

La solution optimale pourra être choisie parmi celles qui maximisent et minimisent les bornes de l'intervalle ou sera celle qui réduira l'intervalle défini par (7) ou (8), c'est à dire :

$$\delta \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^* (\boldsymbol{\sigma}^* - \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}^*) - \boldsymbol{\eta}^* \boldsymbol{\sigma}^0 dV = 0 \quad (10a)$$

$$\delta \int_V \boldsymbol{\sigma}^* (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\varepsilon}^*) - \boldsymbol{\eta}^* \boldsymbol{\sigma}^0 dV = 0 \quad (10b)$$

$$\delta \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^* (\boldsymbol{\sigma}^* - \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}^*) - \boldsymbol{\sigma}^* (\mathbf{S}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\varepsilon}^*) dV = 0 \quad (10c)$$

où $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ prend la valeur $\mathbf{C}^p(\mathbf{x})$ dans V_p . Jusqu'ici aucune hypothèse n'a été formulée sur la forme des inclusions ni sur l'homogénéité de $\mathbf{C}^p(\mathbf{x})$. Selon que les inclusions considérées seront plus souples ou plus rigides que la matrice, l'optimisation de la solution approchée ne devrait pas être indifférente au choix de la quantité à annuler dans (10). En effet, s'il s'agit de

² Pour la solution exacte d'une inclusion ellipsoïdale isolée dans une matrice soumise à un chargement uniforme à l'infini [J. D. Eshelby, 1957], on retrouve bien selon les conditions aux limites:

$$2(E - E_0) = \boldsymbol{\tau}^* \boldsymbol{\varepsilon}_0 V \quad \text{ou} \quad 2(E - E_0) = -\boldsymbol{\eta}^* \boldsymbol{\sigma}_0 V$$

où V représente le volume de l'inclusion. Cette équation s'écrit encore $2(E - E_0) = \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\sigma}_0 V$ si l'on utilise les notations d'Eshelby.

³ Peut-on proposer de prendre l'éq. (9) Comme estimateur de $2(E - E_0)$ après optimisation ?

minimiser l'énergie potentielle du système, alors le terme $\delta(2\Delta W) = \delta \int_V -\boldsymbol{\eta}^* \boldsymbol{\sigma}^0 dV$ constitue

la variation (au sens de la sensibilité aux variations de $\boldsymbol{\eta}^*$) du supplément d'énergie dû à la présence d'inclusions. En revanche, les autres termes constituent la variation de l'énergie "parasite" liée à la qualité de l'approximation.⁴

CONSTRUCTION DE SYSTEMES LINEAIRES

Lorsque les interactions mécaniques entre inclusions sont prises en compte, les champs dans les inclusions ne sont pas uniformes. On peut approcher les champs \mathbf{B}^p par leurs approximations β^p utilisant des séries de Taylor. Les termes $\beta_j^{(a,b,c)}$ constituent alors les variables cinématiques indépendantes du système. Dans le cas d'inclusions ellipsoïdales dans des matrices élastiques linéaires isotropes infinies, on peut en outre utiliser la superposition de solutions analytiques connues, issues de déformations libres exprimées en termes de Taylor. Dans la plupart des cas, on envisagera des conditions aux limites telles que les champs induits seraient uniformes s'il n'y avait pas d'inclusion. Seront considérés comme tels les champs à faible variation devant la taille des inclusions.

Les tenseurs de polarisation $\boldsymbol{\tau}^*$ et $\boldsymbol{\eta}^*$ sont identiquement nuls hors des inclusions. Dans la matrice l'égalité $\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{C}^0 \boldsymbol{\varepsilon}^*$ est donc exactement vérifiée ce qui annule un terme de l'intégrale hors des inclusions. Il ne reste donc à évaluer les intégrales que dans les inclusions. En reportant (5) dans (7) ou (8), les rigidités étant homogènes dans les inclusions, et en posant $\Delta \mathbf{C}^p = \mathbf{C}^p - \mathbf{C}^0$ on obtient respectivement pour (10a), (10b) et (10c):

$$\delta \sum_{p=1}^N \int_{V_p} \{ \mathbf{D}^{pq} \mathbf{B}^q + \boldsymbol{\varepsilon}^0 \} \{ \Delta \mathbf{C}^p [\mathbf{D}^{pr} \mathbf{B}^r + \boldsymbol{\varepsilon}^0] - \mathbf{C}^0 \mathbf{B}^p \} - \mathbf{B}^p \boldsymbol{\sigma}^0 dx_p = 0 \quad (11a)$$

⁴ Obtiendra-t-on une solution différente pour (10a) et (10b) ?

- Si oui, alors nous ne disposerons que d'une solution,

- Si non, alors nous disposerons de 3 solutions,

Si $C \ll C^0$, on peut donc s'attendre à ce que (10b) et (10c) constituent un mauvais choix, car les termes en $C^{-1} \boldsymbol{\sigma}^*$ vont masquer le terme $\delta(2\Delta W)$, terme qui a un sens physique au sens de la minimisation de l'énergie libre d'un système. De façon analogue, si $C \gg C^0$ (10a) et (10c) devraient constituer un mauvais choix. Lorsque $C \approx C^0$ (10c) devrait être le meilleur choix afin de ne pas privilégier la vision en contraintes de celle en déformations. Si $C(x)$ n'est pas homogène dans l'inclusion ou varie d'une inclusion à l'autre, seul un indicateur de qualité de solution, par exemple basé sur les discontinuités de contraintes aux interfaces, permettra de choisir, a posteriori, la meilleure approximation pour les \mathbf{B}^p .

On peut remarquer que les termes en $(\boldsymbol{\sigma}^* - C(x) \boldsymbol{\varepsilon}^*)$ sont ceux utilisés classiquement pour quantifier les erreurs en loi de comportement (travaux de P. Ladevèze et al. *).

On peut aussi remarquer que les principes variationnels de Hashin & Shtrikman sont plus "tolérants" et n'apporteraient pas, semble-t-il, de simplification à notre problème. On peut noter que les PV de Hashin & Shtrikman utilisent l'isotropie statistique qui n'est pas nécessaire ici.

Il conviendrait de normer les termes des eq. (10) par une quantité qui soit indépendante de la solution obtenue. $2(E - E^0) / \int_{V_p} \boldsymbol{\varepsilon}^0 (\mathbf{C}^p - C) \boldsymbol{\varepsilon}^0 dv$ serait normé. Peut-on être sûr que le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 à la même vitesse quand $(\mathbf{C}^p - C)$ tend vers 0 ?

$$\delta \sum_{p=1}^N \int_{V_p} C^0 [D^{pq} B^q + \varepsilon^0 - B^p] \{ S^p C^0 [D^{pr} B^r + \varepsilon^0 - B^p] - D^{pr} B^r - \varepsilon^0 \} - B^p \sigma^0 dx_p = 0 \quad (11b)$$

$$\delta \sum_{p=1}^N \int_{V_p} \{ D^{pq} B^q + \varepsilon^0 \} \{ \Delta C^p [D^{pr} B^r + \varepsilon^0] - C^0 B^p \} - C^0 [D^{pq} B^q + \varepsilon^0 - B^p] \{ S^p C^0 [D^{pr} B^r + \varepsilon^0 - B^p] - D^{pr} B^r - \varepsilon^0 \} dx_p = 0 \quad (11c)$$

où l'on somme sur les indices doublés. On obtiendra (6 * N * t) lignes d'équation en dérivant chacune des équations (11) par rapport aux quantités $\beta_i^p(a, b, c)$. En utilisant (3) dans (11a) on obtient un système linéaire d'équations de la forme :

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{a', b', c'} \int_{V_p} \sigma_i^{(a', b', c')} (x - x_p)^{a+a'} (y - y_p)^{b+b'} (z - z_p)^{c+c'} dv \\ & + 2 \sum_{q, a', b', c', k, l} \int_{V_q} D_{ki}^{(a, b, c)} \Delta C_{kl}^q \varepsilon^{(a', b', c')} (x - x_q)^{a'} (y - y_q)^{b'} (z - z_q)^{c'} dv \\ & = 2 \sum_{q, a', b', c', j} \beta_j^q(a', b', c') \left\{ \sum_{r, a', b', c', j, k, l} \int_{V_r} D_{ki}^{(a, b, c)} \Delta C_{kl}^r D_{lj}^{(a', b', c')} dv \right. \\ & \quad \left. - \sum_k \left[\int_{V_q} D_{ki}^{(a, b, c)} C_{kj}^q (x - x_q)^{a'} (y - y_q)^{b'} (z - z_q)^{c'} dv \right] \right. \\ & \quad \left. + \int_{V_p} D_{kj}^{(a', b', c')} C_{ki}^p (x - x_p)^a (y - y_p)^b (z - z_p)^c dv \right\} \quad (12a) \end{aligned}$$

Pour l'équation (11b) le système linéaire d'équation prend la forme :

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{a', b', c'} \sum_{k, m} \int_{V_p} \sigma_k^{(a', b', c')} [C S]_{ki}^m (x - x_p)^{a+a'} (y - y_p)^{b+b'} (z - z_p)^{c+c'} dv \\ & \quad + 2 \sum_{q, a', b', c', k, l, m} \int_{V_q} D_{ki}^{(a, b, c)} [Id - C S]_{kl}^m \varepsilon^{(a', b', c')} (x - x_q)^{a'} (y - y_q)^{b'} (z - z_q)^{c'} dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \sum_{q, a', b', c', j} \beta_j^{(a', b', c')} \left\{ \sum_{r, a', b', c', j, k, l} \int_{V_r} D_{ki}^{(a, b, c)} [C \begin{matrix} 0 & q & 0 \\ S & & \\ C & & -C \end{matrix}] \begin{matrix} 0 & & 0 \\ & r_q & \\ & & l_j \end{matrix} D_{kl}^{(a', b', c')} dv \right. \\
 &\quad - \sum_k \left[\int_{V_q} D_{ki}^{(a, b, c)} [C \begin{matrix} 0 & & 0 \\ S & & \\ C & & -2C \end{matrix}] \begin{matrix} 0 & q & 0 \\ & a' & \\ & & b' \end{matrix} (x - x_q)^a (y - y_q)^b (z - z_q)^c \right. \\
 &\quad \left. + \int_{V_p} D_{kj}^{(a', b', c')} [C \begin{matrix} 0 & & 0 \\ S & & \\ C & & -2C \end{matrix}] \begin{matrix} 0 & q & 0 \\ & a & \\ & & b \end{matrix} (x - x_p)^a (y - y_p)^b (z - z_p)^c dv \right] \left. \right\} \\
 &\quad + \int_{V_p} \beta_i^{(a, b, c)} [C \begin{matrix} 0 & q & 0 \\ S & & \\ C & & -2C \end{matrix}] \begin{matrix} 2a & & \\ & 2b & \\ & & 2c \end{matrix} (x - x_p)^a (y - y_p)^b (z - z_p)^c dv \quad (12b)
 \end{aligned}$$

où il faut évaluer les intégrales sur les volumes des inclusions. On reconnaît alors la ligne d'équation correspondant aux indices p, (a, b, c) et i, dans le système où chaque colonne est identifiée par q, (a', b', c') et j. Pour l'équation (11c) le système linéaire d'équation s'obtient bien sûr en soustrayant les termes des éq. (12a) et (12b).

EVALUATION DES INTEGRALES POUR DES INCLUSIONS SPHERIQUES

Les termes d'influence $D_{ki}^{(a, b, c)}$, pour des inclusions sphériques en matrice isotrope et des déformations libres $\beta_i^{(a, b, c)}$ exprimées en série de Taylor, s'expriment analytiquement. Chaque terme s'obtient en sommant des fonctions du type $(x - x_p)^a (y - y_p)^b (z - z_p)^c * [\sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z - z_p)^2}]^n$. L'exposant n est entier, pair et positif ou nul pour les potentiels intérieurs et impair et négatif pour les potentiels extérieurs. En pratique, il s'agit donc de savoir évaluer sur des domaines sphériques les intégrales suivantes :

$$I_{a, b, c} = \int_{V_p} (x - x_p)^a (y - y_p)^b (z - z_p)^c dv \quad (13a)$$

$$\begin{aligned}
 J &= \int_{V_r} \{(x - x_r)^a (y - y_r)^b (z - z_r)^c\} \{(x - x_p)^{a'} (y - y_p)^{b'} (z - z_p)^{c'}\} \\
 &\quad * [\sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z - z_p)^2}]^n dv \quad (13b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K &= \int_{V_q} \{(x - x_r)^a (y - y_r)^b (z - z_r)^c\} \{(x - x_p)^{a'} (y - y_p)^{b'} (z - z_p)^{c'}\} \\
 &\quad * [\sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z - z_p)^2}]^n [\sqrt{(x - x_r)^2 + (y - y_r)^2 + (z - z_r)^2}]^m dv \quad (13c)
 \end{aligned}$$

Pour la première, I, on trouvera le résultat en [5]. Les suivantes, J et K, prennent parfois une forme déjà rencontrée pour calculer les potentiels de [4] et [5]. Ceux-ci sont analytiques pour des ellipsoïdes [8] [9].⁵

ALTERNATIVE A L'EVALUATION EXACTE DES INTEGRALES DE TYPE J ET K

Afin de comparer ces expressions à celles de la méthode classique, éq. (4), on utilise à nouveau les projections $D(a, b, c, a', b', c')$ de $D(a', b', c')$ sur la base de Taylor. Si l'on pose

$$I(a, b, c, a', b', c') = \int_{V_p} (x - x_p)^{a+a'} (y - y_p)^{b+b'} (z - z_p)^{c+c'} dv \quad \text{et} \quad I(a, b, c, 0, 0, 0) = \int_{V_p} (x - x_p)^a (y - y_p)^b (z - z_p)^c dv,$$

intégrales que l'on peut calculer analytiquement pour des sphères. (cf annexe 1), on peut donc écrire

$$\begin{aligned} \int_{V_p} \sigma_i^0 (x - x_p)^a (y - y_p)^b (z - z_p)^c dv &= \sigma_i^0 I(a, b, c, 0, 0, 0) \\ \beta_j^p(a, b, c) \int_{V_p} D(a'', b'', c'') C_{ki}^{pq} (x - x_p)^a (y - y_p)^b (z - z_p)^c dv &\approx \\ \beta_j^p(a, b, c) \sum_{a', b', c'} D(a', b', c', a'', b'', c'') C_{kj}^{pq} I(a + a', b + b', c + c') & \\ \int_{V_p} D(a'', b'', c'') \Delta C_{kl}^{pr} D(a''', b''', c''') dv &\approx \\ \sum_{a, b, c, a', b', c'} D(a, b, c, a'', b'', c'') \Delta C_{kl}^{pr} D(a''', b''', c''') I(a + a', b + b', c + c') & \end{aligned} \quad (14)$$

En remplaçant dans les éq. (12), on s'aperçoit que les nouveaux systèmes d'équations sont sensiblement différents de celui de la méthode classique. Notamment, les volumes respectifs des inclusions apparaissent de façon plus explicite dans les éq. (12). En effet, dans les éq. (4), la taille des inclusions n'apparaît de façon implicite que par l'éloignement, relatif à leur taille, des inclusions. Cependant, l'alternative évoquée ici pour l'évaluation des intégrales présente deux inconvénients :

- les fonctions sont à nouveau projetées sur la base de Taylor,
- les multiples sommes en cascade qui apparaissent dans l'éq. (14) sont très consommatrices en CPU.

ESTIMATION DES PROPRIETES ELASTIQUES POUR UN NOMBRE FINI D'INCLUSION

L'objectif de la méthode proposée ici est de fournir une information locale sur les champs, une information moyenne étant souvent insuffisante, par exemple, pour une étude de

⁵ Comment calculer les intégrales de type J et K précisément et rapidement ? Une solution analytique existe-t-elle toujours ?

l'endommagement. D'autre part la formulation ne se prête pas, en tous cas en l'état, aux milieux périodiques. Cependant, on peut proposer une façon d'estimer les propriétés élastiques du milieu hétérogène dans le cas où l'on ne saurait résoudre que des problèmes en milieu infini comportant un nombre fini d'hétérogénéités. On construit par exemple un V. E. R. sphérique qui reflète la morphologie du matériau hétérogène (fig. 1). On procède ensuite au calcul interactif en soumettant le milieu à une ou des sollicitations uniformes à l'infini (par exemple une traction uniaxiale dans le cas isotrope sur le plan macroscopique). Il s'agit ensuite d'effectuer la moyenne des champs dans le V.E.R. et de rechercher les caractéristiques de l'hétérogénéité élastique, équivalente dans le modèle d'Eshelby, qui

donnent les mêmes valeurs des champs : $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \int_V \boldsymbol{\varepsilon} dv$ dans le problème à inclusions multiples

identique à $\boldsymbol{\varepsilon}$ (uniforme) dans le problème à une inclusion⁶.

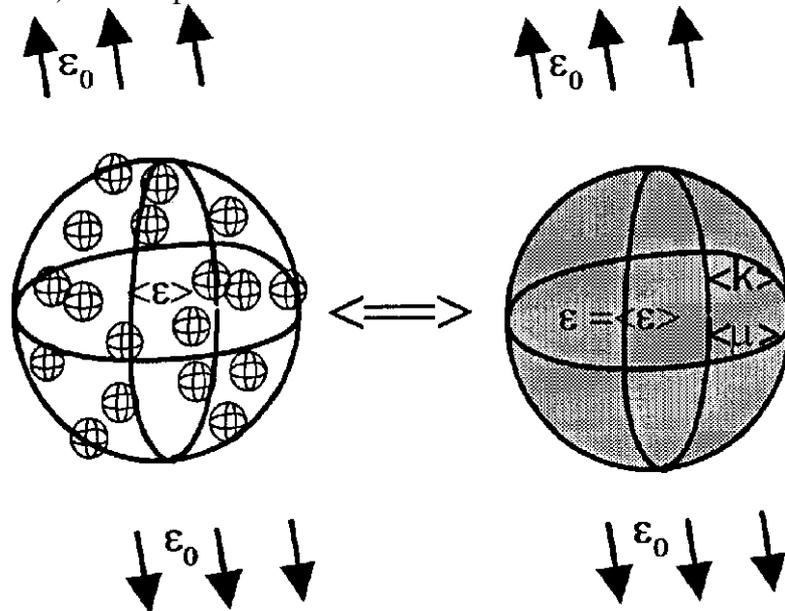


Figure 1. Schéma de principe pour l'évaluation des caractéristiques élastiques moyennes avec un nombre fini d'hétérogénéités dans un milieu infini.

RÉFÉRENCES

- [1] Eshelby, J. D., *The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems*, Proc. Roy. Soc. Lond. A, 241, (1957), p. 376-396.
- [2] Mura, T., *Micromechanics of Defects in Solids*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, (1993), second, revised edition, reprinted.
- [3] François, D., Pineau, A., Zaoui, A., *Comportement mécanique des matériaux*, Hermès, Paris, (1991).
- [4] Moschovidis, Z. A. et Mura, T., *Two-Ellipsoidal Inhomogeneities by the Equivalent Inclusion Method*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, (1975), p. 847-852.
- [5] Fond, C., Riccardi, A., Schirrer, R. et Montheillet, F., *Mechanical Interaction Between Spherical Inhomogeneities: An Assessment of a Method Based on the Equivalent Inclusion*, soumis à Eur. J. Mech.

⁶ Cela pourrait consister en une sorte de modèle auto cohérent inverse.

- [6] Hill, R. , *New derivations of Some elastic Extremum Principles*, Progress in Applied Mechanics - The Prager 60th Anniversary Volume, Macmillan, New York, (1963), p.99-106.
- [7] Hashin, Z. et Shtrikman, S., J. Mech. Phys. Solids, 10, (1962a), p. 335-342 , J. Mech. Phys. Solids, 10, (1962b), p. 343-352.
- [8] Ferrers, N. M., *On the Potentials of Ellipsoids, Ellipsoidal Shells, Elliptic Laminae, and Elliptic Rings of Variable Densities*, Quarterly J. of Pure and Appl. Math., XIV, (1877), p. 1-22.
- [9] Dyson, F. W., *The Potentials of Ellipsoids of Variable Densities*, Quarterly J. of Pure and Appl. Math., XXV, (1891), p. 259-288.